Universidad de Granada

Departamento de Didáctica de la Matemática

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN TUTELADO

SIGNIFICADOS PUESTOS DE MANIFIESTO POR ESTUDIANTES DE BACHILLERATO RESPECTO AL CONCEPTO DE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. ESTUDIO EXPLORATORIO

José Antonio Fernández Plaza

Granada,

Julio 2011

Universidad de Granada

Departamento de Didáctica de la Matemática

SIGNIFICADOS PUESTOS DE MANIFIESTO POR ESTUDIANTES DE BACHILLERATO RESPECTO AL CONCEPTO DE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. ESTUDIO EXPLORATORIO

Trabajo de investigación tutelado realizado bajo la dirección de los doctores D. Luis Rico Romero y D. Juan Francisco Ruiz Hidalgo del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta José Antonio Fernández Plaza para su aprobación por el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Fdo.: José Antonio Fernández Plaza

V° B° del director	V° B° del codirector
Fdo.: D. Luis Rico Romero	Fdo.: D. Juan Francisco Ruiz Hidalgo

El presente trabajo de investigación tutelado se ha realizado en el seno del grupo de investigación *Didáctica de la Matemática. Pensamiento numérico* (FQM-193) de la Universidad de Granada perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía.

A la memoria de Raimundo, Alfredo, Ángeles y Lucas

A José Antonio y María, mis padres, que me han dado la vida y la formación necesaria para enfrentarla

A Jesús y Ángela, mis hermanos, por su apoyo, cariño y ánimo

A María, mi abuela, por su cariño, sabiduría y experiencia

A todos mis compañeros/as de este máster, por su valiosa amistad y colaboración desinteresada

A mis amigos/as, compañeros inseparables del camino de la vida

A todos mis profesores/as, por la cultura y valores que me han transmitido

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero expresar mi agradecimiento al director de este trabajo, por su buen hacer y sabiduría, valorando mis logros y rectificando mis desviaciones del camino a seguir con paciencia y dedicación.

De la misma manera, agradezco la dedicación del codirector de este trabajo, por sus valiosas aportaciones y consejos para no desfallecer en mi actividad.

En tercer lugar y no menos importante, agradezco la entera disponibilidad, ayudas, aclaraciones y sugerencias de parte de los profesores Dr. D. Pedro Gómez, Dr. D. José Luis Lupiáñez, Dra. Dª. María Consuelo Cañadas y Dra. Dª. Marta Molina.

Por último, quisiera agradecer al grupo de estudiantes y a su profesor, D. Miguel Ángel Sola Torres, su participación para que este trabajo haya sido posible.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE GRÁFICOS[1]

[1] Las figuras están incluidas en los correspondientes Anexos adjuntos a esta memoria

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Introducción

La revisión de Gutiérrez y Boero (2006) sobre la actividad investigadora llevada a cabo por el *International Group for The Psycholgy of Mathematics Education* (PME) en el periodo 1976-2006, se estructura en cinco amplios campos de investigación, de los cuales destacamos la revisión realizada sobre los aspectos cognitivos del aprendizaje y la enseñanza en distintas áreas de contenido.

Desde 1985 un grupo de trabajo constituido en el seno del PME ha investigado sobre la naturaleza del *Pensamiento Matemático Avanzado* (*Advanced Mathematical Thinking*). El estudio de la naturaleza de este tipo de pensamiento se ha enfocado sobre los modelos cognitivos útiles para interpretar la formación de conceptos matemáticos, en la caracterización de ciertas etapas de su desarrollo que permitan fijar una frontera con "la fase elemental", y en la descripción del papel que juegan los procesos, los objetos y las definiciones matemáticas en cada una de las etapas, desde un nivel básico hasta los niveles avanzados, ejemplificándose, singularmente, en el aprendizaje y enseñanza del cálculo (Azcárate y Camacho, 2003).

El estudio del concepto de límite, junto con la noción de infinito y la de continuidad de una función constituyen, desde sus comienzos, contenidos prioritarios de las investigaciones sobre pensamiento matemático avanzado (Tall y Vinner, 1981).

Nos centramos en este estudio sobre algunas nociones básicas relacionadas con el concepto de límite finito de una función en un punto. En el concepto de límite de una función en un punto se observa una persistencia de conflictos cognitivos en los estudiantes que, regularmente, han puesto de manifiesto varios investigadores (Tall y Vinner, 1981; Monaghan, 1991; Cornu, 1991; Tall, 1992; Juter, 2007a, 2007b). Davis y Vinner (1986) propusieron cinco importantes fuentes de concepciones erróneas (*misconceptions*) sobre el concepto de límite de una secuencia, las cuales son fácilmente extensibles al caso continuo de límite de una función en un punto o en infinito, que se resumen en:

1) influencia del lenguaje,

2) ensamblaje de las representaciones matemáticas a partir de fragmentos prematemáticos,

3) construcción de conceptos dentro de la matemática,

4) influencia de ejemplos específicos, y

5) malinterpretación debida a la experiencia propia.

El lenguaje del cálculo, como relatan las investigaciones, se caracteriza por una terminología común y escasa de términos matemáticos específicos para nombrar los conceptos, lo cual provoca que surjan conflictos entre la definición formal de los conceptos y las concepciones espontáneas preexistentes en la mente de los estudiantes (Cornu, 1991; Davis y Vinner, 1986). En términos de Vinner (1983), la *imagen conceptual* de los estudiantes no recoge todos los aspectos cognitivos de la *definición conceptual*.

La necesidad de investigar sobre el modo de facilitar a los estudiantes la superación de las limitaciones de aprendizaje asociadas al concepto de límite ha llevado a algunos investigadores a diseñar propuestas didácticas que incluyan una definición de límite funcional, alternativa a la formal (Blázquez, 1999; Bokhari y Yushau, 2006). En esta línea se sitúa nuestro proyecto de investigación, que iniciamos en el Máster para Profesor de Educación Secundaria y Bachillerato, con el trabajo de investigación tutelada consistente en el diseño de una unidad didáctica sobre este concepto matemático dirigida a estudiantes de bachillerato (Fernández-Plaza, 2010). El actual foco de estudio consiste en explorar las concepciones intuitivas que sobre dicho concepto muestran los estudiantes de este nivel, mediante el dominio del lenguaje básico y de su aplicación e interpretación en las gráficas.

Este es un estudio exploratorio y descriptivo, para el cual hemos adoptado el siguiente enfoque:

- Un enfoque cualitativo en la descripción de términos clave utilizados por los sujetos cuando afirman o refutan ciertos asertos referidos a diferentes facetas del concepto de límite.
- Un enfoque cualitativo para la descripción de términos clave utilizados por los sujetos cuando justifican la existencia o no de límite a partir de una gráfica.
- Una interpretación conjunta para la descripción de concepciones intuitivas sobre el límite y la continuidad de una función que ponen de manifiesto mediante la asignación de propiedades simbólicas a varias gráficas de funciones.

Este estudio se aborda desde una revisión de estudios anteriores, fuentes documentales importantes en la categorización y elección de tareas para la elaboración del instrumento de recogida de información que utilizamos. La construcción de un cuestionario sobre la noción de límite finito de una función en un punto, vinculado a los objetivos de investigación que pretendemos alcanzar, muestra continuidad con investigaciones precedentes. Esperamos que las conclusiones de este trabajo proporcionen información que permita diseñar una experiencia de aula con la cual contrastar y validar sus conjeturas, así como sustentar una propuesta curricular relativa a estas nociones.

1.2. Objetivos de investigación

El estudio se propone describir:

- cómo los estudiantes expresan verbal y simbólicamente sus concepciones intuitivas sobre la noción de límite de una función en un punto, y
- cómo interpretan y responden a tareas vinculadas con dicho concepto, analizando el significado de determinados términos claves que expresan diferentes facetas vinculadas al concepto de límite.

El objetivo general que persigue esta investigación es el siguiente:

"Explorar y describir los significados de límite finito de una función en un punto que los estudiantes muestran cuando realizan tareas de enunciado verbal, gráfico y simbólico".

Los objetivos específicos en los que se desglosa este objetivo general del estudio son:

1º Diseñar un instrumento para recoger información en registro verbal y simbólico referente al concepto de límite finito de una función en un punto.

2º Identificar los términos claves que emergen de los registros verbales de los estudiantes al abordar tareas de enunciado verbal y gráfico, realizar su análisis conceptual y establecer categorías para interpretar las respuestas obtenidas.

3º Inferir los significados que ponen de manifiesto los estudiantes cuando identifican propiedades simbólicas de gráficas de funciones de distinto nivel de complejidad referentes a límite finito de una función en un punto, límites laterales e imagen.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Incluimos algunas ideas centrales para una fundamentación teórica de este trabajo que, de una manera general, tratan varios aspectos relacionados con esta investigación. En primer lugar, realizamos una revisión y sintetizamos de modo no exhaustivo los antecedentes de este estudio y de aquellos resultados que consideramos relevantes acerca de las concepciones intuitivas, conflictos cognitivos y propuesta de definiciones alternativas a la definición formal de limite finito de una función en un punto. En segundo lugar, delimitamos conceptualmente una cierta interpretación de la noción de representación en educación matemática, cuyo uso es amplio en las investigaciones sobre el aprendizaje matemático de los escolares. En tercer lugar, revisamos de manera detallada los trabajos de dos autores que se han preocupado por describir, caracterizar y modelizar la formación de conceptos matemáticos por los individuos, así como las características cognitivas particulares sobre los conceptos de límite y continuidad. En cuarto lugar, abordamos el análisis conceptual de los términos “aproximar”, “tender”, “alcanzar”, “rebasar” y “límite”, que son términos básicos con significado común, que en matemáticas se utilizan en contextos específicos del cálculo donde requieren mayor precisión pero que guardan similitud con alguno de los originales. Por último precisamos la noción de significado de un concepto matemático que vamos a utilizar en el trabajo, que supone un avance respecto de modelos cognitivos anteriores.

2.1. Antecedentes de la investigación

Algunos investigadores ponen de manifiesto la amplitud y ambigüedad de la expresión inglesa *"Advanced Mathematical Thinking"* (Pensamiento matemático avanzado, tal como usualmente lo traducimos), que admite varias interpretaciones y modos de abordar su estudio y que, por tanto, no cuenta con un consenso sobre lo se entiende por ello (Zaskis y Applebaum, 2007; Harel y Sowder, 2005 ; Selden y Selden, 2005). Por otro lado, existe amplio acuerdo en cuanto a la dificultad de delimitar la transición entre el pensamiento matemático elemental y el pensamiento matemático avanzado (Tall, 1992; Azcárate, Camacho y Sierra, 1999; Zaskis y Applebaum, 2007; Edwards, Bárbara, Dubinsky y Mc Donald, 2005).

Azcárate y Camacho (2003) realizan una revisión del estado de la investigación sobre "Pensamiento Matemático Avanzado", ámbito de investigación que comienza en 1985 cuando se forma en el seno del *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME) un grupo de trabajo con el objetivo de profundizar en las investigaciones cognitivas acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con el cálculo infinitesimal.

Señalan cómo determinados procesos cognitivos caracterizan el PMA (Pensamiento Matemático Avanzado), aún no siendo exclusivos del él. Entre ellos destacan y adquieren mayor importancia en los cursos superiores *representar* y *abstraer* de entre los procesos cognitivos de componente psicológica y *definir*, *demostrar* o *formalizar* de entre los de componente matemática.

Para establecer la diferencia entre las matemáticas elementales y las avanzadas, estos autores, destacan la importancia de las definiciones que son propias de las matemáticas avanzadas, mientras que en las elementales los objetos se describen apoyándose en la experiencia.

Además, destacan las aportaciones de tales investigaciones al desarrollo curricular. También presentan los temas de investigación que está realizando el grupo de investigación *Didáctica del Análisis*, de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), como son: los procesos cognitivos elementales, el estudio histórico y epistemológico de los conceptos fundamentales del análisis, y el papel que juegan los ordenadores, calculadoras gráficas y simbólicas en la enseñanza y aprendizaje del cálculo.

Pasamos a enumerar y describir brevemente algunas de las investigaciones centradas en el aprendizaje del concepto de límite en general, profundizando algo más en lo que se refiere a investigaciones relativas al límite de una función.

Investigaciones sobre el lenguaje del cálculo y concepciones intuitivas

- Vinner (1983) analiza las imágenes conceptuales de una muestra de estudiantes sobre el concepto de función y extrae cuatro categorías de definiciones personales de los estudiantes, a partir de las cuales caracteriza las imágenes conceptuales principales. Un refinamiento de las categorías se puede consultar en Vinner y Dreyfus (1989).
- Monaghan (1991) explora la influencia del lenguaje sobre las ideas de los estudiantes acerca de los términos "tender a", "aproximarse a", "converger a" y "límite". Obtuvo evidencia empírica de que los estudiantes manejan esos términos con un significado común y cotidiano.
- Swinyard (2011) estudia cómo los estudiantes eran capaces de reconstruir la definición formal[1] de límite de manera asistida, estudiando la evolución de sus definiciones personales a lo largo de varias fases de entrevistas clínicas diseñadas por el investigador.

Investigaciones sobre conflictos cognitivos referentes a los conceptos de límite y continuidad

- Romero (1995) diseña, implementa y desarrolla una propuesta didáctica para secundaria sobre el concepto de número real, registrando las expectativas, los avances y limitaciones en el proceso de aprendizaje llevado a cabo por los escolares.

[1] La definición formal de límite viene dada por la siguiente expresión:
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se cumple $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

- Tall y Schwarzenberger (1978) estudian los conflictos cognitivos de estudiantes acerca de los procesos infinitos que subyacen al concepto de número real y de límite. Entre las causas de tales conflictos destacan la pérdida de precisión del significado formal de un concepto debido a la transferencia a los estudiantes de significados coloquiales ocultos en un lenguaje informal.
- Tall y Vinner (1981) exploran conflictos cognitivos que se originan de las diferencias existentes entre las definiciones personales de los sujetos acerca de los conceptos de límite y continuidad y la definición "formal" de dichos conceptos, siendo esta última la definición que acepta la comunidad matemática en su mayoría.
- Blázquez y Ortega (1998) realizan un estudio sobre la comprensión del límite de una función en un punto con estudiantes de 2^{o} curso de bachillerato de ciencias sociales mediante tareas planteadas en los registros de representación simbólico, gráfico y numérico-tabular. Los resultados de este estudio se desarrollaron en Blázquez y Ortega (2001).
- Lauten, Graham, Ferrini-Mundi (1994) llevan a cabo una serie de entrevistas clínicas con la intención de examinar la comprensión e imágenes conceptuales sobre los conceptos de función y límite (Tall y Vinner, 1981) y la influencia del empleo de la calculadora gráfica en el aprendizaje de estos conceptos.

Investigaciones centradas en la introducción en el aula de definiciones de límite alternativas a la formal y en el estudio de fenómenos asociados

- Bokhari y Yushau (2006) introducen una definición alternativa a la formal de límite denominada "Local (L, e)-aproximación de una función de una variable", y proponen actividades de aplicación de dicha alternativa.
- Blázquez, Gatica y Ortega (2009) analizan comparativamente las diferentes conceptualizaciones de límite funcional que aparecen en varios manuales de análisis matemático y proponen una definición alternativa de límite funcional desarrollada en otros trabajos (Blázquez, 1999; Gatica, 2007, citados por

Blázquez, Gatica y Ortega, 2009) en la que se marca una fuerte distinción semántica entre los procesos "aproximarse" y "tender".

- Claros (2010) estudia los fenómenos matemáticos relacionados con el concepto de límite finito de una sucesión extraídos de las definiciones intuitiva y formal analizando la presencia de dichos fenómenos en libros de texto y producciones de escolares.

2.2. Representaciones

En este apartado sin la intención de ser exhaustivos destacaremos aspectos relevantes referentes a cómo se concibe la noción de representación dentro de la investigación en didáctica de la matemática.

La noción de representación es un concepto clave en la filosofía del conocimiento, que se ha manejado y sometido a crítica de manera sistemática. Las disciplinas cuyo objeto de estudio es el conocimiento humano manejan las nociones de representación y comprensión (Rico, 2000).

Desde la década de los 80 las nociones de representación que se han desarrollado son equivalentes a una *señal externa que muestra y hace presente un concepto matemático, también como signo y marca, con el que los sujetos piensan las matemáticas, e incluso, aquéllos esquemas mentales con los que el sujeto trabaja en su mente sobre ideas matemáticas.* Aunque se han empleado alternativas conceptuales similares pero no equivalentes como *símbolos*, *sistema de matemático de signos*, *sistemas de notación* y *sistema de registros semióticos* introducidos por Skemp, Kieran y Filloy, Kaput, y Duval, citados por Rico(2000) respectivamente.

Destacamos a continuación dos de las varias definiciones de representación existentes. La primera debida a Kaput (1987), citado por Rico, Castro y Romero (1996), en la que se considera una dualidad entre el objeto representante y el objeto representado, que funcionan como entidades funcionalmente separadas pero íntimamente relacionadas y postula que cualquier especificación particular de la noción de representación debería describir las siguientes entidades: *el mundo representado, el mundo representante, qué aspectos del mundo representado están siendo representados, qué* *aspectos del mundo representante realizan la representación y la correspondencia entre los dos mundos*, aclarando que en los casos interesantes uno o los dos mundos pueden ser entidades hipotéticas o incluso abstracciones.

La segunda definición que queremos destacar y adoptamos es la de Castro y Castro (1997) quienes consideran las representaciones como "*notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes*".

Dado que el conjunto de símbolos, gráficos y reglas que permiten representar una estructura matemática tienen carácter sistémico, se habla de *sistemas de representación*. Ningún sistema de representación puede agotar la totalidad de las relaciones complejas que se encierran en un concepto matemático, en cambio, cada sistema resalta ciertas propiedades del mismo y dificulta la comprensión de otras propiedades (Castro y Castro, 1997).

Para nuestro estudio consideraremos para la construcción del instrumento de recogida de datos los sistemas de representación *verbal* (véanse ítems A1.1.a, A1.1.b, A1.1.c, B1.1.a, B1.1.b, B1.1.c y C1.2), *simbólico* (véanse las tarea ítem A2 y B2), y *gráfico* (véanse las tareas A2 y B2) del concepto de límite de una función en un punto.

2.3. Modelos cognitivos de formación de conceptos matemáticos

Describimos en este punto, sin entrar en los detalles de estructura, las nociones y terminología de dos modelos construidos para describir el proceso de formación de conceptos matemáticos y que emplearemos para justificar nuestras interpretaciones sobre las concepciones intuitivas que pongan de manifiesto los sujetos del estudio.

Imagen conceptual y definición conceptual

Los términos *imagen conceptual* y *definición conceptual* fueron introducidos por Vinner (Tall y Vinner, 1981; Vinner,1983). Las definiciones de estos términos mejoran su precisión entre un trabajo y otro, por lo tanto detallaremos las que describe Vinner (1983).

Vinner (1983) define en primer lugar la noción de *cuadro o dibujo mental de un concepto (mental picture)* como el conjunto de todas las representaciones visuales mentales del concepto, ya sean pictóricas, simbólicas o gráficas. Llama *imagen conceptual (conceptual image)* al conjunto de todos los dibujos mentales asociados al concepto y de las propiedades que asigne el sujeto mentalmente a cada dibujo mental. Por otro lado la *definición conceptual (conceptual definition)* es cualquier explicación verbal precisa del concepto, no circular. El modelo introducido por Vinner (1983) es el siguiente:

> Asumimos la existencia de dos celdas diferentes en la estructura cognitiva ... Una celda es para la definición del concepto y la segunda para la imagen conceptual. Una o las dos celdas pueden estar vacías. Pueden haber interacciones entre las dos celdas aunque se hayan formado de manera independiente ... (Vinner, 1983, p.294)

Dicho modelo se ejemplifica con el concepto de sistema de coordenadas. Supongamos que un niño cree que los ejes coordenados tras la visualización de varias gráficas necesariamente han de formar un ángulo recto. Si su profesor/a les introduce la definición general de que un sistema de coordenadas está formado por dos líneas rectas cualesquiera, en palabras de Vinner (1983).

> ... Pueden darse tres escenarios: (I) La imagen conceptual cambiará para incluir también sistemas de coordenadas de ejes que no formen un ángulo recto. (II) La celda de la imagen conceptual permanecerá como está. La celda asociada a la definición contendrá la definición del profesor/a durante un momento pero esta definición será olvidada o distorsionada ... Cuando se le pida al pequeño que defina un sistema de coordenadas él hablará sobre ejes que forman ángulo recto. (III). Ambas celdas quedarán como están. En el momento en que al pequeño se le pregunte ... él repetirá la definición del profesor/a, pero en todas las otras situaciones él pensará en un sistema de coordenadas como el que tiene dos ejes perpendiculares (Vinner, 1983, p.294)

Vinner generaliza el proceso al caso en que un concepto sea introducido por primera vez por medio de una definición. En este caso la celda asociada a la imagen conceptual estará vacía, la cual será llenada cuando se presenten ejemplos y otras explicaciones al estudiante, pero conjeturan que generalmente la imagen conceptual provocada no recogerá todos los aspectos de la definición.

APOS (action-processes-objects-schemas) y descomposición genética de conceptos.

Dubinsky (1991, p.96) con la intención de extender y generalizar la ideas de Piaget (entre ellas las de *abstracción reflexiva*) llama *descomposición genética de un concepto* a su descripción en términos de la teoría y basada en datos empíricos de las matemáticas involucradas y cómo un sujeto puede que haga construcciones que le encaminarían a una comprensión del concepto, las cuales no diferirían mucho con las de la teoría. Aclara que no es única, es decir, no existe una descomposición genética para todos los estudiantes, sólo ofrece un camino posible que los estudiantes puede que utilicen para construir el concepto.

Cottrill, Dubinsky, Schwingendorf, Thomas, Nichols y Vidakovic (1996, pp.171-172) construyen un modelo denominado APOS para describir el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Observan tres tipos generales de conocimiento matemático: las *acciones (actions)*, los *procesos (processes)*, y los *objetos (objects)* que se organizan en estructuras denominadas *esquemas (schemas)*.

Definen *acción* como cualquier transformación física o mental de objetos que dan lugar a otros objetos. Cuando un individuo reflexiona y establece un control sobre una acción ésta se dice que es *interiorizada* convirtiéndose en un proceso.

Un *proceso* es una transformación que se realiza sobre objetos siempre que el individuo sea capaz de controlarla, es decir, es capaz de describir y reflexionar sobre los pasos de dicha transformación sin necesidad de llevarla a cabo. Una vez que el individuo ha construido un proceso, este puede ser revertido o coordinado con otros procesos dando lugar a nuevos procesos.

Un *objeto* se construye mediante la *encapsulación* de un proceso. La *encapsulación* se consigue cuando el individuo llega a ser consciente de la totalidad del proceso, se da cuenta de las transformaciones que pueden actuar sobre él y es capaz de construir dichas transformaciones. La encapsulación puede revertirse.

Así llegamos a la noción un *esquema* que es una colección coherente de acciones, procesos y objetos. Ahora bien este mecanismo es recursivo o expansible, porque esquemas pueden ser encapsulados como objetos que formen parte de un “esquema” más amplio.

Existen otros modelos que requieren mención, pero no vamos a desarrollar como el de Sfard (1991) y Duval (1996, 1999), citados por Azcárate y Camacho (2003). El primero consta de las fases de *interiorización, condensación y reificación*, y el segundo es de componente semiótica.

Características cognitivas particulares de los conceptos de límite y continuidad

Tall (1980) pone de manifiesto la riqueza de tipos de los procesos infinitos *(limiting processes)*. Procesos infinitos *continuos*, tales como el límite de una función en un punto y la propia noción de continuidad, pues se basan en la idea de continuo frente a discreto, y procesos infinitos *discretos*, como los límites de secuencias y series, las expansiones decimales, o aproximación de áreas de formas geométricas.

Cuando a los estudiantes se les transmite una noción informal de límite y posteriormente la definición formal, la imagen conceptual se "contamina" con ciertas propiedades que no forman parte de la definición conceptual dada. Los estudiantes conciben en su mayoría el límite como un proceso dinámico en vez de una cantidad numérica (Tall, 1980b, citado por Tall, 1980).

Cornu (1981, 1983) citado por Gray y Tall (1994) muestra que dado que el proceso de cálculo de límite no es explícito, esto rompe en cierta manera con las intuiciones de los estudiantes pues su experiencia previa con los algoritmos aritméticos y algebraicos son explícitos.

Edwards, Dubinsky y McDonald (2005) no consideran que el pensamiento sobre límites sea avanzado en su totalidad, dado que técnicas particulares de cálculo de límites para ciertas funciones son actividades rutinarias que los estudiantes pueden dominar sin relativa dificultad, aunque realmente no comprendan el trasfondo formal detrás de las mismas.

Cottrill et al. (1996) hacen mención de errores comunes que otros estudios empíricos han observado en estudiantes sobre sus concepciones respecto del concepto de límite, tales como la *percepción del límite como algo inalcanzable*, *como una cota*, y que *sólo se puede aproximar monótonamente*, y construyen la siguiente descomposición genética del concepto de límite de una función en un punto basado en un estudio empírico realizado que consta de los siguientes pasos o etapas de desarrollo.

1. La acción de evaluar f en un sólo punto x que es considerado estar cerca de, o incluso igual a a.
2. La acción de evaluar f en unos pocos puntos, cada punto sucesivamente más cerca de a que el anterior.
3. Construcción de un esquema coordinado como sigue:
   (a) Interiorización de la acción del paso 2 para construir el “proceso en dominio” en el que x se aproxima a a.
   (b) Construcción del "proceso en recorrido o rango" en el que y se aproxima a L.
   (c) Coordinación de los pasos (a) y (b) vía f. Es decir, la función f aplicada a el proceso de x aproximándose a a para obtener el proceso de $f(x)$ aproximándose a L.
4. Realizar acciones sobre el concepto de límite hablando, por ejemplo, sobre los límites de combinaciones de funciones. De esta manera, el esquema del paso 3 es encapsulado para convertirse en un objeto.
5. Reconstruir los procesos del paso 3(c) en términos de intervalos y desigualdades. Esto es hecho introduciendo estimaciones numéricas de la cercanía de la aproximación, en símbolos, $0 < |x-a| < \delta$ y $|f(x)-L| < \varepsilon$.
6. Aplicar el esquema de cuantificación para conectar el proceso del paso anterior para obtener la definición formal de límite.
7. Una definición completa épsilon-delta aplicada a situaciones específicas (Cottrill et al., 1996, pp.177-178).

2.4. Análisis conceptual de los términos “aproximarse”, “tender”, “alcanzar”, “rebasar” y “límite”

Consideramos importante la realización de un análisis conceptual de los términos “aproximarse”, “tender”, “alcanzar”, “rebasar” y “límite” por los siguientes motivos:

- En primer lugar, estos términos aparecen de manera frecuente en la literatura revisada, tanto en la definición del concepto de límite como en la caracterización de las dificultades y errores asociados, poniendo de manifiesto los conflictos entre sus usos formales y los comunes y coloquiales por parte de los estudiantes que, no obstante, son verdaderos en ciertos contextos.

- En segundo lugar, han sido utilizados en los enunciados verbales de algunas de las actividades incluidas en el instrumento de recogida de datos.
- En tercer lugar, los sujetos los emplean, salvo sinónimos, para expresar distintas interpretaciones del concepto de límite, ya sea de manera técnica (terminología adquirida por la instrucción mediada por el profesor, el libro de texto o el propio instrumento de recogida de datos) o informal (sus propias interpretaciones personales de los términos).
- En cuarto lugar, de acuerdo a la noción de significado que manejamos, cada uno de los términos se refiere a parte de las propiedades y modos de uso asociados al concepto de límite y, junto con otras nociones, contribuyen a delimitar su significado[2].
- Por último, la necesidad de fijar un marco interpretativo para analizar los usos y significados de dichos términos puestos de manifiesto por los sujetos de nuestro estudio.

En definitiva, este análisis conceptual permite ubicar el uso matemático de estos términos en contraste con sus significados cotidianos (Rico, 2001), y es útil para interpretar la concepción de los sujetos, aunque tal información no sea completa si los sujetos no proporcionan información adicional.

Consideramos una circunstancia favorable para esta investigación el hecho de que los sujetos de nuestro estudio recibieran instrucción sobre el tópico previo a su trabajo con el cuestionario por lo que, según el modelo cognitivo *imagen conceptual/definición conceptual* (Vinner, 1983), dará lugar a posibles alternativas, que los sujetos hagan un uso técnico más o menos elaborado de la terminología, definiciones y ejemplificaciones del concepto de límite funcional introducidas en el aula, al menos de manera temporal, o bien describirán con una terminología informal y personal sus interpretaciones del conocimiento recibido en la instrucción, pudiendo en algún caso, hacer prevalecer sus concepciones originales. De dichas alternativas podemos obtener evidencia empírica tras el análisis de los datos correspondiente.

---

[2] La noción de significado se encuentra detallada en el apartado 2.6. No confundimos el término “límite” con el concepto al que hace referencia, dado que el concepto implica mucho más que una “definición”o el nombre dado al mismo.

Presentaremos a continuación las distintas acepciones de los términos anteriores y haremos posteriormente las reflexiones oportunas.

Aproximar

Del DRAE (Diccionario de la Real Academia Española) de la RAE (2001) extraemos las acepciones del verbo "aproximar" que guardan cierta similitud a las que se manejan en un contexto matemático informal:

> "1. tr. Arrimar, acercar. U. t. c. prnl.// 2. tr. Obtener un resultado tan cercano al exacto como sea necesario para un propósito determinado. U. t. c. prnl."

El diccionario de uso del español de María Moliner (1998) proporciona otros matices semánticos del verbo "aproximar".

> "1. tr. y prnl. Estar cerca o estar cada vez más cerca una fecha o un acontecimiento... Faltarle a alguien poco para cierta edad [sinónimo "parecerse"]"

El término equivalente a "aproximar" en inglés es *"to approach"* y algunas de las acepciones en el diccionario online Oxford (2011)que queremos resaltar son las siguientes:

> "Come near or nearer to (someone or something) in distance or time: ... come close to (a number, level, or standard) in quality or quantity [*acercarse o acercarse más a alguien o algo en distancia o tiempo... Acercarse a (un número,nivel o estándar) en calidad o cantidad*]"

Tender

El término "tender" tiene un significado específico matemático recogido en el DRAE aparte de otros significados extensibles a un contexto matemático:

> "6. tr. Alargar algo aproximándolo hacia alguien o hacia otra cosa.// 8. tr. Dicho de una persona o de una cosa: Tener una cualidad o característica no bien definida, pero sí aproximada a otra de la misma naturaleza.// 11. tr. Mat. Dicho de una variable o de una función: Aproximarse progresivamente a un valor determinado, sin llegar nunca a alcanzarlo."

El diccionario de uso del español de María Moliner proporciona un significado específico parecido al DRAE del verbo "tender".

> "... Mat. Aproximarse una variable o función a un valor determinado sin llegar nunca a alcanzarlo."

El equivalente en inglés al verbo "tender" es *"to tend"* y en el diccionario online Oxford (2011) tiene la siguiente acepción específica en matemáticas:

> "(Tend to) Mathematics (of a variable) approach a given quantity as a limit [(*Tender a) Matemáticas (de una variable) aproximarse a una cantidad dada como un límite*]"

Hasta este momento, "tender" es "aproximarse progresivamente sin llegar nunca al valor", por lo tanto, es una forma peculiar de aproximarse.

Blázquez, Gatica y Ortega (2009) consideran que una sucesión de números *se aproxima a un número* si el error disminuye, así, la sucesión $(\frac{1}{n})$ se aproxima a -1, pero consideran que una sucesión *tiende a un límite*, si cualquier aproximación al límite es mejorable por términos de la sucesión,luego la sucesión $(\frac{1}{n})$ se aproxima a 0 y tiende a 0, pero no tiende a -1.

Monaghan (1991) confirma tras la realización de su estudio que los estudiantes no distinguen entre "tender a" y "aproximarse" dentro de un contexto matemático.

Detectamos en la expresión "$f(x)$ tiende a L, cuando x tiende a a" un conflicto a nivel de definición, dado que si x tiende a a, la variable x nunca puede ser igual a a, en consecuencia, si $f(x)$ tiende a L, $f(x)$ nunca puede ser igual a L y la función constante $f(x) = L$ no tendría límite, lo cual contradice la definición formal de límite. Así la expresión correcta sería "$f(x)$ tiene por límite L cuando x tiende a a si…" o bien, "$f(x)$ tiene límite L en el punto $x = a$ si…". Este conflicto puede inducirse en la imagen conceptual de los estudiantes tal como relatan Tall y Vinner (1981).

Alcanzar

El término "alcanzar" tiene los siguientes significados en el diccionario de la Real Academia Española (DRAE):

> " 1. tr. Llegar a juntarse con alguien o algo que va delante.// 2. tr. Coger algo alargando la mano para tomarlo.// 3. tr. Llegar a tocar, golpear o herir a alguien o algo.// 4. tr. Llegar a poseer lo que se busca o solicita.// 5. tr. Llegar a igualarse con alguien en algo. El niño menor alcanzará pronto al mediano en sus estudios.// 6. intr. Llegar hasta cierto punto o término…// 14. intr. Dicho de un tiro de arma arrojadiza o de fuego: Llegar a cierto término o distancia…// 17. prnl. Llegar a tocarse o juntarse."

El diccionario de uso del español de María Moliner(1998) proporciona resultados similares sobre el verbo “alcanzar”:

> “1 tr. Llegar al punto en que está algo o alguien que va delante en una marcha o progreso hacia cierta cosa. Poder tocar o coger cierta cosa a la distancia o altura a que está.// 2 Coger algo que está a cierta distancia, particularmente para *darlo a otra persona.*Alargar.”

El término que consideramos equivalente en inglés a “alcanzar” es *“to reach”* cuyas acepciones están recogidas en el diccionario online Oxford (2011):

> “1 *(no object, with adverbial of direction)* stretch out an arm in a specified direction in order to touch or grasp something. [Traducción: *(no objeto, con adverbio de dirección).* Extender un brazo en una dirección específica para tocar o agarrar algo]// 2 *(with object)* arrive at; get as far as[Traducción: *(con objeto)* Llegar a ; llegar tan lejos como]”

En general, “alcanzar” es intuitivamente “llegar a” o “llegar a tocar”. Nosotros consideramos “alcanzar” en el sentido en que una función *alcanza el límite* si el límite es imagen del punto en el que se estudia el límite, pero extendemos su significado a que el límite sea valor de cualquier otro punto del dominio.

Rebasar

El DRAE recoge las siguientes acepciones del término “rebasar”:

> “1. tr. Pasar o exceder de cierto límite.// 2. tr. En una marcha, progresión, etc., dejar atrás, adelantar.// 3. tr. Mar. Pasar, navegando, más allá de un buque, cabo, escollo u otro cualquier estorbo o peligro.”

Observamos que “rebasar” tiene un sentido de “quedar por encima de una cota superior”, excluyéndose la acepción “quedar por debajo de cierta cota inferior”, por tanto, nosotros ampliaremos el rango de sentidos del término “rebasar”, de tal manera que en este estudio, diremos que *el límite de una función es rebasable* si nos podemos aproximar tanto como queramos con valores de la función mayores o menores que el límite, es decir, superando o disminuyendo la cota establecida por el límite, independientemente de si es alcanzable o no. Tal noción es fácilmente reformulable en lenguaje formal “Se pueden construir dos sucesiones monótonas de imágenes convergentes al límite, una creciente y otra decreciente, o bien, una alternada”.

Límite

El término “límite” tiene variedad de significados como se observa en el diccionario de la Real Academia Española.

> “ 1. m. Línea real o imaginaria que separa dos terrenos, dos países, dos territorios.// 2. m. Fin, término. U. en aposición en casos como dimensiones límite, situación límite.// 3. m. Extremo a que llega un determinado tiempo. El límite de este plazo es inamovible.// 4. m. Extremo que pueden alcanzar lo físico y lo anímico. Llegó al límite de sus fuerzas.// 5. m. Mat. En una secuencia infinita de magnitudes, magnitud fija a la que se aproximan cada vez más los términos de la secuencia.”

En el diccionario del uso del español de María Moliner se amplían ligeramente los significados anteriores.

> “Línea, punto o momento que señala la separación entre dos cosas en sentido físico o inmaterial.// (gralm. pl.) Particularmente, línea imaginaria que señala la separación entre dos países, fincas, etc. Línea, punto o momento que señala el final de algo, en sentido físico o inmaterial: El límite de resistencia de un material// (pl.) Especificaciones que determinan hasta dónde llega una cosa no material: “Los límites de sus atribuciones”.// Se emplea invariable en aposición: “Dimensiones límite fijadas para. . . ”// Un caso límite. “Una situación límite”.// Se usa también en aposición aplicado a las personas que están en el límite de la normalidad y la subnormalidad”.

El Vocabulario Científico y Técnico (Real Academia de las Ciencias, 1990) recoge varias entradas con término base “límite” pero en sentido general se tiene la siguiente acepción:

> “Estado al que puede aproximarse cuanto sea deseable una variable o un fenómeno// Estado extremo en el que el comportamiento de determinados sistemas o fenómenos cambia bruscamente” (p.425).

El término equivalente en inglés es *“limit”* del cual presentamos las siguientes acepciones incluidas en el diccionario online (Oxford, 2011)

> “ A point or level beyond which something does not or may not extend or pass: [un punto o nivel más allá del cual no o puede que no se puede extender o pasar]// the terminal point or boundary of an area or movement: [el punto final o fronterizo de un área o movimiento]// the furthest extent of one’s physical or mental endurance: [la máxima medida de la resistencia física o mental de uno]// 2. a restriction on the size or amount of something permissible or possible: [una restricción del tamaño o cantidad de algo admisible o posible]// 3. *Mathematics*. a point or value which a sequence, function, or sum of a series can be made to approach progressively,

> until they are as close to it as desired. [un punto o valor al cual una secuencia, función o suma de una serie puede aproximarse progresivamente, hasta que estén tan cerca a él como se desee]".

El término "límite" en lo que a su sentido común y coloquial se refiere, denota la idea de fin, frontera y de irrebasable, mientras que en su uso científico-técnico, está relacionado con la idea de aproximación progresiva, resistencia de un material, o estado extremo en el que el comportamiento de determinados sistemas cambia bruscamente. Volvemos a reiterar que no estamos confundiendo el concepto de límite con su definición, ni con el término nominal "límite".

Conclusiones del análisis conceptual

Presentamos las conclusiones que obtenemos de este apartado:

1. El término "tender" tiene un uso técnico en matemáticas y en un contexto informal se usa en sentido de "aproximación progresiva a un número sin llegar a alcanzarlo". Adoptamos la distinción entre "aproximar" y "tender" que realizaron Blázquez, Gatica y Ortega (2009), pero con la precaución de no utilizar la expresión "f(x) tiende a L" que si f(x) es constantemente L daría lugar a un conflicto semántico y formal. De acuerdo con Monaghan (1991) los estudiantes no distinguían entre estos dos términos y creemos que sería necesaria la búsqueda de situaciones que provoquen en los estudiantes una distinción entre tales términos similar a la que pusieron de manifiesto Blázquez y cols.
2. El término "alcanzar" tiene un uso técnico en matemáticas, por ejemplo, "el máximo de una función continua definida en un intervalo compacto se alcanza en un punto de dicho intervalo". Nosotros asumimos que una *función alcanza el límite* si el límite es valor vía la función del punto donde se realiza el estudio, es decir, si la función es continua en el punto. Sería necesaria la búsqueda de situaciones que den lugar a diferentes formas de interpretar el "alcance del límite" por parte de los estudiantes.
3. El término "rebasar" se transfiere sin dificultad al terreno matemático en un sentido análogo al común. Nosotros diremos que *el límite de una función es*

rebasable, si se pueden construir dos sucesiones monótonas de imágenes convergentes al límite, una creciente y otra decreciente, o bien, una alternada".

4. El término "límite" según investigadores tales como Cornu (1991) ha dado lugar a una variedad de intuiciones erróneas de los estudiantes inducidas por su uso común y cotidiano. En este estudio esperamos obtener evidencia empírica de que tales concepciones comunes siguen formando parte de los significados y aproximaciones intuitivas de los estudiantes.

5. En este análisis conceptual sólo hemos fijado "las definiciones" que vamos a manejar de cada uno de los términos, pero no los sistemas de representación asociados, ni los diferentes sentidos en los que estos se usan, podríamos decir, que el único sistema de representación subyacente es el verbal. En el apartado 2.2, ya hemos descrito los sistemas de representación y en el siguiente apartado, expondremos nuestra noción de significado que, de algún modo, interpretamos como un avance respecto del modelo cognitivo de Tall y Vinner.

2.5. Significado de un concepto matemático

En este apartado presentamos la noción de significado que vamos a utilizar en este estudio. Revisaremos la discusión de Rico (2007) sobre la noción de significado derivada de los trabajos de Frege (1996a, 1996b, 1996c), que incluye como nociones fundamentales las de *signo*, *referencia* y *sentido*.

Frege realiza la construcción de la noción de significado en dos fases, la primera referente al significado de un término o nombre propio, y la segunda supone una ampliación de la fase anterior al estudio del significado de enunciados, proposiciones y conceptos.

Por la acotación de la extensión de esta memoria, no vamos a profundizar en la teoría semántica de Frege sino que presentaremos un ejemplo ilustrativo de las nociones básicas de *signo*, *sentido* y *referencia*.

Consideremos el “concepto del número 7”. Tal concepto viene representado por el *signo* “7”, pero también está denotado por “3+4” que es otro *signo*. Ambos signos se refieren al mismo objeto “concepto 7” que se denomina “*referencia del signo*”. Ahora bien, para distinguir los signos que tienen la misma referencia, Frege introduce la noción de sentido, es decir, de qué manera está el signo representando a la referencia, así el sentido del signo “7” es distinto del sentido del signo “3+4”, porque 7 puede tener el sentido de “cardinal de un conjunto”, mientras que “3+4” tiene un sentido operatorio de “cardinal de la unión de dos conjuntos disjuntos”, sentidos que son claramente distintos.

En palabras de Frege (1996a) las nociones de estos términos son las siguientes:

> “ Es natural considerar entonces que a un signo (nombre, unión de palabras, signo escrito), además de lo designado, que podría llamarse la referencia del signo, va unido lo que yo quisiera denominar el sentido del signo, en el cual se halla contenido el modo de darse (...) al signo le corresponde un determinado sentido y a éste, a su vez, una determinada referencia, mientras que a una referencia (a un objeto), no le corresponde solamente un signo” (pp.173-174).

Como ejemplifica Frege(1996a), la referencia “planeta Venus” está representada por dos signos “lucero vespertino” y “lucero matutino”, pero es claro que el sentido de ambos signos no es el mismo aunque sea igual la referencia (p.173).

Frege(1996b) extiende la noción de significado a los conceptos matemáticos y a modo de interpretación resumimos lo que Frege entiende por *significado de un concepto matemático*, en las siguientes líneas:

- *Signo(s)* o *Símbolo(s)* que lo expresa(n).
- *Concepto formal* predicado funcional que asigna valores veritativos a los objetos que caen bajo el mismo, y que forma parte de una estructura conceptual.
- *Sentido o modo en que vienen dados el (los) Objeto(s)* que saturan el concepto; tales modos vienen determinados por las relaciones u operaciones que caracterizan la estructura de la cual el concepto forma parte.

En el ámbito de las matemáticas escolares, Rico propone combinar la teoría semántica de Frege y la fenomenología didáctica de Freudenthal; así la inclusión de fenómenos que provienen del mundo físico, natural o social como formas de dotar de sentido al concepto da lugar a un sistema de relaciones mucho más amplio que el estrictamente lógico y formal original de Frege, y propone la siguiente definición de significado de un concepto matemático para el ámbito de la matemática escolar:

- *Símbolo(s) o sistemas de representación*[3] que lo expresa(n), sistemas que son técnicamente establecidos y culturalmente mediados.
- *Concepto formal* dado por extensión o por un predicado funcional que asigna valores veritativos a los objetos que caen bajo el mismo, y que forma parte de una estructura conceptual.
- *Sentido o modo en que vienen dados el (los) Objeto(s)* que saturan el concepto; esos modos expresan relaciones internas o externas que proporcionan sentido al concepto, son fenómenos que provienen del mundo físico, natural o social, cuando refieren a hechos o relaciones vinculados con una experiencia, pero también proceden de distintas conexiones o modos de relación con una estructura matemática.

Un ejemplo ilustrativo es el concepto de función, el cual tiene asociado una serie de signos o símbolos que lo expresan ($f(x) = x^2$, “una parábola”, una gráfica, un diagrama cartesiano, etc.), un concepto formal que incluye, entre otros objetos, “la asignación unívoca de una imagen a cada origen” y que excluye “la asignación de dos imágenes a un origen”, y un sentido o modo de darse los objetos, como por ejemplo, la trayectoria parabólica de un proyectil, denota un sentido de darse el objeto “asignación unívoca de una imagen a cada original” que cae dentro del concepto función.

Gómez (2007) en su trabajo de tesis desde una perspectiva curricular, se basa en la noción de significado anterior para diseñar un método de planificación de unidades didácticas para profesores en formación denominado *análisis didáctico*, una de cuyas etapas es el *análisis del contenido*, en el que se espera que los profesores sean capaces de organizar y articular las tres dimensiones del significado de un concepto matemático en la matemática escolar, que reciben el nombre de *sistemas de representación*, *estructura conceptual* y *fenomenología*. Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008) ejemplifican dicho análisis para el tópico de los números naturales.

---

[3] En el sentido de Castro y Castro (1997), ver apartado 2.2 de este capítulo.

A modo de conclusión, esta forma de entender el significado de un concepto de la matemática escolar da lugar a un cambio de enfoque hacia una orientación curricular que supone un planteamiento más elaborado del modelo cognitivo basado en la dualiad *imagen conceptual/ definición conceptual* de Vinner(1983), de tal forma, que la relación concepto (definición) - representación que subyace en dicho modelo, se enriquece con la introducción de las nociones de sistema de representación y fenómeno didáctico. En definitiva, se pasa de concebir el conocimiento de un concepto como el manejo eficiente de una definición formal, mediante representaciones adecuadas, para deducir las propiedades de dicho concepto, a una otra forma de concebir el conocimiento como la incorporación además de los fenómenos que dan sentido al concepto, que no se restringen a un dominio matemático, sino que abarca otras áreas del mundo físico, cultural y social, y se establece como un paso para el desarrollo de las habilidades de modelización y resolución de problemas.

CAPÍTULO 3

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. Tipo de estudio y descripción general

El interés de esta investigación queda patente en la revisión de antecedentes realizada, que muestra la diversidad de enfoques y de resultados relevantes respecto a las concepciones e intuiciones que manejan los estudiantes de secundaria en el inicio de su estudio de las nociones básicas del cálculo. Nuestro estudio se centra delimitar, describir y caracterizar los significados puestos de manifiesto por estudiantes españoles de bachillerato sobre el concepto de límite finito de una función en un punto, al inicio de sus estudios sobre análisis matemático. El enfoque aquí adoptado permite calificar este trabajo como un estudio exploratorio por varios motivos. En primer lugar, dado el escaso número de estudios llevados a cabo con estudiantes españoles relativos a los significados con que abordan los conceptos básicos del análisis, parece conveniente iniciar y sistematizar los estudios en este campo. En segundo lugar, el marco teórico elegido se centra en los significados sobre un concepto relevante de las matemáticas escolares, con un aparato crítico de análisis derivado del triángulo semántico de Frege, cuyo empleo en este tipo de estudios tiene carácter pionero. Finalmente, el estudio es exploratorio ya que se ha planificado con la intención de recoger información sobre la comprensión de los estudiantes con el fin de diseñar una propuesta de innovación curricular sobre este campo de la matemática escolar, basada en datos y evidencias empíricas.

El estudio también es descriptivo en el sentido en que pretendemos describir el modo en que los estudiantes entienden, utilizan e interpretan determinadas nociones y conceptos. La muestra es intencional y por disponibilidad; no se pretende generalizar resultados en contextos mas amplios, sino particularizarlos para profundizar sobre ellos en un contexto determinado.

El instrumento de recogida de datos es un cuestionario cuyas tareas surgen de estudios previos, readaptadas, completadas y aplicadas en un nuevo contexto, de acuerdo con el carácter exploratorio de este estudio.

En lo referente al análisis de datos llevado a cabo, se hace un análisis conceptual de términos clave, se sigue un enfoque cualitativo en el análisis de las respuestas abiertas de los sujetos a los distintos ítems y una interpretación conjunta en el análisis de las respuestas cerradas de los sujetos.

3.2. Los sujetos, ciclo y nivel curricular

La muestra la forman 36 estudiantes de primer curso de Bachillerato (16 - 17 años) matriculados en la asignatura Matemáticas I en el Instituto de Educación Secundaria "La Sagra" de Huéscar (Granada).

Según la información suministrada por el profesor titular responsable de la asignatura, quien autorizó la implementación del cuestionario al grupo, los estudiantes han recibido instrucción previa sobre los conceptos de límite de una función en un punto y de límite de una sucesión durante el curso 2009/2010, lo cual es importante tener en consideración. En el presente curso 2010/2011, en el momento de la aplicación del cuestionario, los estudiantes ya habían realizado varias sesiones de trabajo sobre límite funcional, lo cual puede influir en las respuestas que den a las cuestiones planteadas en el cuestionario.

Las concepciones que infiramos del estudio no serán espontáneas e intuitivas ya que tales concepciones, previas a la instrucción, anterior estarán mediadas libro de texto, por las propias concepciones del profesor y del trabajo ya realizado en clase.

Este estudio pretende obtener evidencias de los sesgos que se detectan al explorar y describir los significados sobre el concepto de límite finito de una función en un punto que los estudiantes muestran cuando realizan tareas de enunciado verbal, gráfico y simbólico.

3.3. Elaboración del instrumento

El instrumento de recogida de datos fue un cuestionario elaborado en las siguientes fases:

Fase I: Revisión de estudios empíricos y libros de texto

En esta fase se llevó a cabo una revisión de estudios empíricos y de libros de texto para elaborar una batería exhaustiva de actividades relacionadas con límite finito e infinito en un punto y límite en infinito.

Los estudios empíricos consultados fueron: Monaghan (1991); Lauten et al. (1994); Cooley (2002); Elia et al.(2009); Blázquez y Ortega (1998) y Claros (2010).

Los libros de texto consultados fueron los dos siguientes: Hastings y Reynolds (1999) y Hornsby, Lial y Rockswold (2011).

Se recogieron 24 actividades originales entre investigaciones y libros de texto, las cuales se sometieron a un análisis y filtrado posterior.

Fase II: Elección y definición de las variables de tarea

En esta fase establecimos unas variables de tarea y asignamos valores a cada una de las 24 tareas originales para su clasificación. Dichas variables son *Foco conceptual (FC), Sistemas de representación (SR), Fenómenos (Fen) y Complejidad (Compl).*

Restringimos el rango de valores para ciertas variables de tarea, con la consiguiente limitación de su volumen. La propuesta inicial no cubría ciertos valores de las variables que, a nuestro juicio, debían tomarse en consideración; esto implicó una modificación de las actividades originales y el diseño de nuevas actividades por parte de los investigadores para cubrir ciertos valores de las variables que las originales no habían contemplado.

Fase III: Construcción del cuestionario final y tareas seleccionadas para el análisis

La batería de tareas quedó reducida a 10 tareas a distribuir entre las dos opciones, A y B, del cuestionario. Cada cuestionario consta de cinco tareas. Describimos brevemente las actividades que hemos elegido para este estudio que serán las únicas incluidas en el Anexo I:

Tareas A1 y B1: Cada una de estas tareas tiene dos partes (A1.1, A1.2) y (B1.1, B1.2). En la primera parte se espera que los sujetos decidan si tres afirmaciones sobre el concepto de límite son verdaderas o falsas y justifiquen sus respuestas. Las segundas partes, A1.2 y B1.2, son idénticas (en el análisis se utilizará el código C1.2). Se espera que los sujetos proporcionen una definición en registro verbal de su concepción sobre límite de una función en un punto.

Tareas A2 y B2: Estas tareas vinculan varios sistemas de representación. La tarea A2 vincula los sistemas de representación gráfico, simbólico y verbal, pidiendo a los sujetos que decidan a partir de la información suministrada por tres gráficas de funciones si éstas tienen límite en ciertos puntos (indicados mediante la notación usual), respectivamente y expliquen en cada caso por qué. La tarea B2 vincula los sistemas de representación gráfico y simbólico, facilitando a los sujetos cuatro gráficas de funciones y siete propiedades sobre el límite en un punto expresadas con notación simbólica, de manera que puedan asignar a cada gráfica dos de las siete propiedades propuestas, sin necesidad de justificación.

El resto de actividades incluidas en los cuestionarios no serán analizadas en este trabajo, debido al volumen de información recogido y a la extensión acotada de esta memoria.

3.4. Procedimiento de aplicación del instrumento.

Cada cuestionario consta de un cuadernillo de 6 hojas en las que se incluía la siguiente información (se adjuntan en Anexo I las portadas de los cuadernillos y las dos primeras actividades de cada cuadernillo seleccionadas para el análisis):

- Datos de identificación de la institución que realiza el estudio, presentación del objetivo del mismo, solicitud de ayuda , instrucciones y agradecimientos al encuestado.
- Datos de identificación: edad, nombre, centro y curso.
- Cinco cuestiones consecutivas que incluyen ítems de respuesta abierta y cerrada. Cuestionario A (3 actividades de respuesta abierta, 2 actividades de respuesta cerrada); Cuestionario B (3 actividades de respuesta abierta, 2 actividades de respuesta cerrada).

El procedimiento de aplicación de los cuestionarios fue el siguiente:

La aplicación del instrumento tuvo lugar el 12 de abril de 2011 en el rango horario de 13:45-14:45 (6ª hora), en el IES La Sagra de Huéscar (Granada), en el Salón de Actos habilitado al efecto. Se organizaron 36 mesas en 3 columnas de 12 mesas aproximadamente, dejando una columna libre entre cada dos con el fin de que no estuvieran demasiado juntos los sujetos de una misma fila. Los cuestionarios A y B se colocaron en las mesas de manera alternada en cada columna antes de que llegaran los participantes, de manera que se pudieran colocar en el lugar que quisieran, con el correspondiente cuestionario asignado.

El investigador se había presentado el día anterior a los sujetos y les había explicado en qué iba a consistir la aplicación de los cuestionarios. En la sesión de aplicación del instrumento sólo les informó de las instrucciones para su cumplimentación. El profesor titular acompañó al investigador durante la sesión de trabajo.

No hubo ninguna incidencia relevante durante la sesión y el investigador resolvió las dudas pertinentes, controlando el riesgo que pudiera darse para el posterior análisis de los datos. Los cuestionarios se recogieron de las mesas de los sujetos, 18 cuestionarios del tipo A y otros 18 del tipo B. El investigador agradeció a los sujetos participantes su valiosa colaboración y, de manera especial, al profesor por haberle facilitado esa hora de clase para la recogida de datos.

3.5. Discusión sobre el alcance de los resultados (Fiabilidad/ Validez)

La fiabilidad de los resultados viene dada por la concordancia establecida entre los tres investigadores participantes en el estudio en el proceso de análisis de los datos, organización e interpretación de los resultados, con las limitaciones propias de un estudio exploratoria. Algunas de las evidencias recogidas concuerdan también con los resultados obtenidos en investigaciones previas. El carácter exploratorio del estudio y el tamaño de la muestra excluyen la conveniencia de aplicar algún test de fiabilidad. La validez externa queda parcialmente cubierta por la revisión de antecedentes, la elección del marco teórico y la selección de tareas. La validez interna se ha controlado durante el proceso de elaboración del cuestionario y la triangulación de las interpretaciones de los resultados entre los investigadores. Por otra parte, la presencia de distractores en dicho instrumento han supuesto una limitación en la interpretación de los datos.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE LOS DATOS

4.1. Consideraciones generales

Concluida la aplicación del instrumento se procedió a identificar mediante un código cada uno los cuestionarios recogidos. Se trata de un código alfa numérico que consta de 6 casillas; las tres primeras corresponden a las iniciales del nombre y primer apellido del alumno, la cuarta casilla identifica con A o B el cuestionario del que se trata y las dos últimas casillas corresponden al número de orden de cada alumnos dentro de sus grupo, desde 01 hasta 18. Una vez diferenciados los cuestionarios A y B, cada alumno se identifica por su número de orden.

Con el fin de organizar la información recogida en las preguntas de respuesta abierta mencionadas (A1.1, B1.1, C1.2 y A2), para su posterior análisis se procedió al vaciado de todas las respuestas proporcionadas por los estudiantes a cada una de las cuestiones, copiando la respuesta literal proporcionada en cada caso, como se ejemplifica en el Anexo II.

Cuando una tarea propuesta en el cuestionario se divide en dos o mas apartados, las respuestas a cada uno de ellos se consideran separadamente, y se añade una letra al código de la tarea para su diferenciación (Ver Anexo II).

Sólo recogimos los registros verbales de los sujetos, no los dibujos que podían acompañarlos, no obstante, tales dibujos se usaron para interpretar el argumento verbal al que acompañaban.

Una vez volcados los datos, procedimos a la localización de términos clave que, según nuestro conocimiento sobre el tema y las propias respuestas, contenían el significado principal de los registros verbales. Debido a la pequeña cantidad de datos existente, 18 respuestas para las tareas A1.1, A2 y B1.1 y 36 respuestas para la tarea C1.2, el proceso de localización de términos clave se pudo realizar de manera exhaustiva.

4.2. Tipo de análisis realizado

En las preguntas de respuesta abierta se han identificado los términos clave utilizados en los argumentos proporcionados, se han diferenciado las aseveraciones de veracidad o falsedad y se han singularizado los argumentos utilizados para sustentar las aseveraciones realizadas.

Una vez localizados los términos clave emergentes de las producciones abiertas de los sujetos, se ha llevado a cabo un primer análisis cualitativo basado en la combinación y significado de dichos términos, que ha permitido una categorización de las respuestas. Esto da lugar a una descripción cualitativa de las categorías de respuesta más relevantes para cada uno de los ítems de respuesta abierta. Finalmente, se ha efectuado un análisis cuantitativo global, basado en las frecuencias de ocurrencia en el uso de cada uno de dichos términos y de sus combinaciones para los distintos ítems.

En lo que se refiere a las respuestas cerradas, se ha realizado un análisis cuantitativo y descriptivo global de las respuestas de los sujetos, sin entrar en un desglose individual de las respuestas.

4.3. Enunciados de las tareas

Presentamos los enunciados de las tareas seleccionadas para su correspondiente análisis (Ver Anexo I):

Tarea A1.1: Rodea la V o la F en cada uno de los siguientes enunciados, según sea verdadero o falso. Justifica en el recuadro tu elección: (Adapt. y trad, Lauten et al., 1994, p.229).

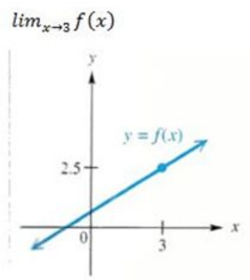
(A1.1.a) Un límite describe cómo se mueve una función f(x) cuando x se mueve hacia cierto punto.

(A1.1.b) Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar.

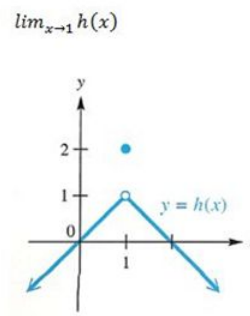
(A1.1.c) Un límite se determina probando con valores de x cada vez más cerca de un número dado hasta que el límite se alcanza.

Tarea A2: Aplica tu definición personal a las funciones definidas por las siguientes gráficas y explica en cada caso si existe el límite en el punto indicado: (gráficas extraídas de Hornsby, Lial y Rockswold (2011))

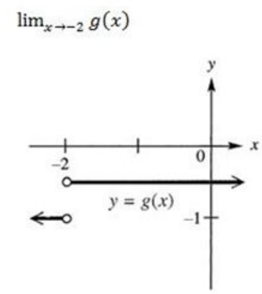
(A2.a)



(A2.b)



(A2.c)



Tarea B1.1: Rodea la V o la F en cada uno de los siguientes enunciados, según sea verdadero o falso. Justifica en el recuadro tu elección: (Adapt. y trad., Lauten et al., 1994, p.229)

(B1.1.a) Un límite es un número o punto al que la función se acerca pero nunca alcanza.

(B1.1.b) Un límite es una aproximación que puedes hacer tan precisa como se quiera.

(B1.1.c) Un límite es un número al cual los valores de una función $f(x)$ pueden acercarse de manera arbitraria mediante restricciones de los valores de x.

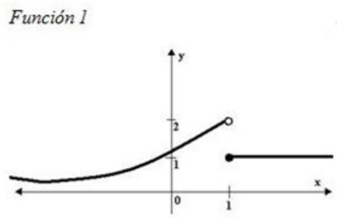
Tarea B2[1]*: Después de trabajar con funciones, un grupo de alumnos ha encontrado las siguientes siete características , que cumplen algunas de ellas:*

(a) $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$	(b) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$	(c) $\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$
(d) $f(1) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$	(e) ver pie de pág.	(f) $f(1) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$
(g) $f(1) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$	(h) $f(1) \neq \lim_{x\to 1} f(x)$	

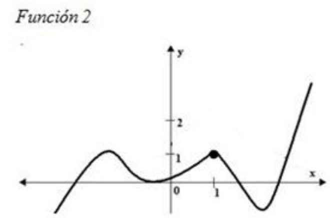
Identifica dos propiedades que cumpla cada función :

[1]Debido a una errata no aparece propiedad (e), es decir, se pasa de la (d) a la (f). No obstante, sólo uno de los sujetos se percata y se inventa una propiedad (e) a partir de la (d).

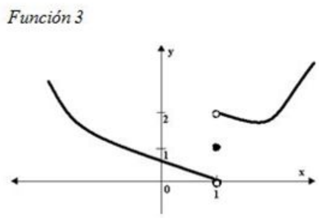
(B2.f1)



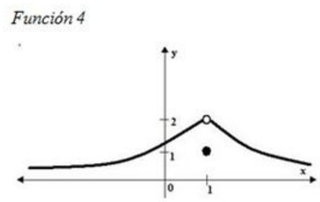
(B2.f2)



(B2.f3)



(B2.f4)



Tarea C1.2: Escribe una definición personal, con tus propias palabras, para límite de una función en un punto.

4.4. Estrategia de análisis

El análisis de los datos recogidos lo organizamos en dos grandes bloques:

BLOQUE I: Análisis de las respuestas abiertas

Análisis del uso de términos clave en los registros verbales. Identificamos y contabilizamos los usos de los distintos términos clave en los registros verbales, sin hacer inferencias de significado. Las agrupaciones de los términos clave las realizamos según nuestra revisión de los términos. No se ha requerido a los estudiantes que definan los términos clave sino que los utilicen de manera técnica, sin precisar los significados que les atribuyen; de ahí que nos centremos en su presencia ya que con la información disponible no es posible deducir si los estudiantes distinguen entre “aproximarse”, “acercarse” y “tender”.

Descripción de las categorías de respuesta a las actividades A1, A2, B1 y C1.2. El análisis de términos clave permitirá clasificar las diferentes respuestas a las actividades A1, A2, B1 y C1.2 en varias categorías, no exhaustivas, debido al tamaño reducido de la muestra.

BLOQUE II: Análisis de respuestas cerradas.

A la hora de analizar las respuestas cerradas a la actividad B2 hay que tener en cuenta dos aspectos importantes:

1. Existen dos sujetos que realizaron la actividad de manera diferente al resto, utilizando registro verbal en sus respuestas en vez de simbólico. Hemos decidido excluirlas del análisis por la extensión acotada de esta memoria.
2. Cada uno de los 18 sujetos dio como mucho dos propiedades para cada función, luego son como máximo 36 las referencias a propiedades individuales para cada función. En consecuencia, se realiza un análisis separado de las respuestas globales (18 pares de propiedades simbólicas a cada función, puede haber respuestas con sólo una propiedad) y de las respuestas parciales (36 propiedades simbólicas, como máximo, por función) a esta actividad.

Se resumirá la asignación de propiedades a las gráficas en conjunto y no de manera individual, pero realizamos una descripción exhaustiva de las respuestas contradictorias de algunos estudiantes al ítem y una calificación cualitativa de las respuestas individuales.

4.5. Uso de los términos clave “aproximar” y “tender”

El uso en los registros verbales de las actividades A1.1, A2, B1.1, C1.2 de los términos “aproximar” y “tender” denotan los procesos vinculados al concepto de límite finito de una función en un punto. Por tanto, hemos considerado necesario agrupar su estudio, con el fin de realizar una comparación sobre el uso de estos términos por parte de los sujetos.

Para ello clasificamos mediante términos clave vinculados a “aproximarse” o “tender” según nuestra interpretación, algunos de los registros verbales de las actividades A1, A2, B1 y C1.2 (A1.2 y B1.2) en tres grupos, *grupo Aprox., grupo Tender y grupo Aprox./Tender*:

Grupo Aprox.: Incluye aquellas respuestas que consideramos equivalentes a “aproximarse”. Los términos clave representativos de este grupo son “aproximarse”, “acercarse” , “moverse” y otros términos relacionados. Ejemplos de respuestas representativas de este grupo están incluidas en las figuras 3.1, 3.2 y 3.3 (Anexo III, Apartado III.1).

Grupo Tender[2]: Incluye aquellas respuestas que incluyen exclusivamente el término “tender”. Un ejemplo representativo de este grupo se incluye en la figura 3.4 (Anexo III, Apartado III.2).

Grupo Aprox/Tender: Incluye aquellas respuestas que contienen términos claves referidos tanto a “aproximarse” como a “tender”. Los términos clave representativos son “tender/aproximarse”, “tender/acercarse”, “tender/dirigirse”, “tender/desplazarse’ y “tender/moverse”. Ejemplos representativos de este grupo están recogidos en las figuras 3.5, 3.6 y 3.7 (Anexo III, Apartado III.3).

En la tabla 4.1 aparece un desglose por ítems de los recuentos de términos clave para cada uno de los tres grupos.

Hemos analizado también los usos de los términos clave en cada uno de los grupos respecto de las *variables de una función*, es decir, para cada término clave se registra si se refiere a la *variable x*, *la variable y o “función”*, o bien, a *ambas variables*. La tabla 4.2 muestra un resumen de las frecuencias correspondientes a este apartado.

Discusión de los resultados del análisis:

Según la información proporcionada por las tablas 4.1 y 4.2 podemos deducir los siguientes resultados:

1. Podemos afirmar que el uso de un determinado término “aproximar”, “acercarse” o “tender” no es exclusivo para la variable independiente (x) o para la variable dependiente (y), ya que se han dado todas las posibilidades de

[2] El verbo tender se usa de manera aislada, las expresiones típicas son “x tiende a…”,“la función tiende a…”, por eso lo consideraremos aislado, porque es un término técnico y no informal como los del otro grupo.

Tabla 4.1.

Frecuencias de uso de términos clave vinculados a "aproximar" y "tender" desglosados por ítems.

GRUPOS	TÉRMINOS CLAVE	ÍTEMS									TOTAL
		A1.1.a	A1.1.b	A1.1.c	A2.a	A2.b	B1.1.a	B1.1.b	B1.1.c	C1.2	
Grupo Aprox.	Aproximarse	1	3	7			3	4		8	26
	Acercarse	2		2		1	4	4	6 [1]	8 [2]	27
	Acercarse/Aproximarse									2 [3]	2
	Moverse	1									1
Grupo tender	Tender	5	1			1	2			6	15
Grupo aprox/tender	Tender/ Aproximarse	1		1	1	1		1		3	8
	Tender/Acercarse						1		1	2	4
	Tender/Dirigirse	1									1
	Tender/Desplazarse									1	1
	Tender/Moverse	2									2
Otras respuestas/NSNC		5	14	8	17	15	8	9	11	6	93
TOTAL		18	18	18	18	18	18	18	18	36	$N = 180$

[1] Existe un caso en el que se utiliza "se acerca de manera aproximada", lo cual denota en cierta manera imprecisa idea de no alcance o de inexactitud.

[2] Se utiliza en un caso "número más próximo", "al que se acerca la función", que puede denotar que el límite es un valor óptimo al que la función se aproxima. También existe el caso de "acercarse lo más próximo posible" lo que transmite una idea de aproximar progresivamente, que se sitúa en la frontera con la idea matemática de tender.

[3] Hemos considerado que la expresión "puede hacerse tan precisa como se quiera" es equivalente a aproximar.

* El ítem A2.c se ha descartado porque no contenía información relevante sobre el uso de estos dos términos.

Tabla 4.2.

Frecuencias de uso de términos clave vinculados a "aproximar" y "tender" desglosados según variables de una función.

GRUPOS	TÉRMINOS CLAVE	VARIABLES DE UNA FUNCIÓN			TOTAL
		Variable x	Variable y/función	Ambas	
Grupo Aprox.	Aproximarse	5	20	1	26
	Acercarse	5	21	1	27
	Acercarse/Aproximarse		1	1 (x,y)	2
	Moverse			1	1
Grupo tender	Tender	2	12	1	15
Grupo aprox/tender	Tender/ Aproximarse	2	1	5 $[4(x,y)+1(y,x)]$	8
	Tender/Acercarse		2	2 (x,y)	4
	Tender/Dirigirse			1 (x,y)	1
	Tender/Desplazarse			1(x,y)	1
	Tender/Moverse			2 (y,x)	2
TOTAL		14	57	16	N=87

* Entiéndase la notación (x,y) e (y,x) como la forma de expresar a qué variable se refiere cada verbo del par respectivamente.

uso. Resulta plausible asumir que la mayor frecuencia de uso de los términos "aproximarse" y "acercarse" se debe a que los ítems les dan más peso que al término "tender".

2. El uso de "tender" se limita a expresiones "la función tiende a", "x tiende a" sin ningún tipo de comentario adicional referente a otros aspectos del límite como la alcanzabilidad o rebasabilidad del valor. Existen registros que mencionan "límite infinito" y para referirse al mismo el uso exclusivo es "tender", bien de forma espontánea o porque se haya transmitido de tal manera. Ninguno de los sujetos ha comunicado que la función "se acerque o aproxime a infinito". Pero lo relevante es que para el caso finito se usen más variedad de términos que para el caso infinito.

3. Los términos "aproximarse" y "acercarse" vienen acompañados de otros complementos (*infinitamente, cada vez más, pero nunca llega*) para referirse al proceso infinito, la alcanzabilidad o rebasabilidad del límite, lo cual denota que sus significados son muy amplios y poco precisos.

4. Del ítem A1.1.a, en particular, hemos deducido que el uso de "tender" en 6 de 18 registros niega que el límite describa el movimiento de la función, mientras que "aproximarse" y "acercarse" se utilizan para afirmar que el límite describe el movimiento de la función. Así, interpretamos que "tender" se utiliza cuando se considera el proceso infinito como un todo y sólo nos referimos al resultado final, mientras que "aproximarse" y "acercarse", se utilizan para centrarte en el proceso y a dónde se encamina dicho proceso.

5. En resumen y según los datos recogidos, el uso de "tender" es aislado, en el sentido en que no viene acompañado de complementos. Esta ausencia de complementos dificulta la delimitación del significado real con el que los estudiantes utilizan este término si no se les pregunta directamente por él. Además es un término técnico utilizado por el profesor, el libro de texto y la comunidad matemática. "Aproximar" y "acercarse" son términos más generales e imprecisos, que necesitan de complementos para indicar a qué aspecto del límite se refieren; esta imprecisión muestra ciertos matices de

significado que los estudiantes pueden estar dando a entender en sus registros verbales.

4.6. Uso de términos ligados a la alcanzabilidad y rebasabilidad del límite

Al igual que en el apartado anterior, clasificaremos las respuestas de los estudiantes a las actividades A1, A2, B1 y C1.2 en tres grupos:

Grupo Alcanzabilidad: Incluye las respuestas que, desde nuestro criterio, se refieren de manera exclusiva a la alcanzabilidad del límite, tanto a favor como en contra. Los términos clave que describen este grupo son “alcanzar”, “llegar”, “no tocar” y “ser inexacto”, términos que pueden venir acompañados de “*términos de proceso*” ya estudiados en el apartado anterior. Ejemplos de respuestas representativas de algunos de los términos clave vienen detallados en las figuras 4.1, 4.2 y 4.3 (Anexo IV, Apartado IV.1).

Grupo Rebasabilidad: Incluye las respuestas que se refieren a la rebasabilidad del límite de manera exclusiva. Los términos clave salvo negaciones o sinónimos que describen este grupo son “limitar”, “rebasar”, “sobrepasar”, “ser tope numérico” y “ser número máximo”, que en este caso aparecen de manera aislada. Ejemplos representativos de este grupo se muestran en las figuras 4.4, 4.5 y 4.6 (Anexo IV, Apartado IV.2).

Grupo Mixto: Este grupo contiene respuestas que se refieren a la alcanzabilidad y rebasabilidad del límite. Los pares de términos clave que describen este grupo son: “Alcanzar/ no sobrepasar”, “no tocar/ no rebasar”, “no sobrepasar/ no tocar”, “no tocar/ no pasar”, “llegar/ ser número límite” y “llegar/ no superar”. Ejemplos de respuestas representativas de este grupo se incluyen en las figuras 4.7, 4.8 y 4.9 (Anexo IV, Apartado IV.3).

En la tabla 4.3 desglosamos las frecuencias de los términos clave de cada uno de los grupos según los distintos ítems. Hemos descartado tres respuestas aisladas asociadas a los ítems A1.1.b y B1.1.a que consideramos por separado (Ver figuras 4.10, 4.11 y 4.12 en Anexo IV, Apartado IV.4).

Tabla 4.3.

Frecuencias de uso de términos clave vinculados a la alcanzabilidad o rebasabilidad del límite desglosados por ítems.

GRUPOS	**TÉRMINOS CLAVE**	**ÍTEMS**						**TOTAL**
		A1.1.a	A1.1.b	A1.1.c	B1.1.a	B1.1.b	C1.2	
	Alcanzar		2(A)				1(A)/1(N)	4
	Llegar		1(A)/2(N)					3
	Acercarse/no alcanzar				4		3	7
Grupo Alcanz.	Acercarse/ no llegar [1]				1			1
	Acercarse/ no tocar				1		1	1
	Acercarse/ser inexacto	1						1
	Aproximarse/no alcanzar			2				2
	Aproximarse/no llegar [2]		2		1	1	2	6
	Aproximarse/ser inexacto				2			2
	Tender/ser inexacto				1			1
	Limitar						1	1
	Rebasar		1					1
Grupo Rebasabilidad.	Sobrepasar		1					1
	tope numérico					1		1
	máximo						1	1
	alcanzar/no sobrepasar				2			2
	Aprox./no tocar/no rebasar		1					1
Grupo Mixto.	No tocar/ no pasar						1	1
	No sobrepasar / no tocar						1	1
	Núm. límite / llegar						1	1
	Llegar/no superar						1	1
Otras/NSNC[3]		17	9	16	5	16	22	86
TOTAL		18	18	18	18	18	36	N=127

[1] Vinculada a este par de términos clave existe la variante "acercarse infinitamente" que al igual que con el término destacado anterior que justifica la idea de límite inalcanzable por infinitud.

[2] Vinculada a este par de términos clave existe la variante "aproximarse infinitamente" que justifica la idea de límite inalcanzable por infinitud del proceso.

[*] Los ítems no incluidos no han suministrado ningún término referente a la alcanzabilidad o rebasabilidad del límite. Las abreviaturas (A) y (N) son afirmativo y negativo respectivamente.

Discusión de los resultados del análisis

Tras interpretar la información suministrada por la tabla 4.3 podemos resumir los resultados relevantes que hemos extraído de este análisis en los siguientes puntos:

1. Las referencias a la alcanzabilidad y rebasabilidad del valor del límite se pueden presentar de manera combinada con las descripciones del proceso infinito de convergencia por los términos clave *acercarse*, *aproximarse* y *tender*.
2. Se ha detectado una frecuencia alta de referencias a la alcanzabilidad cuando se requería a los sujetos solamente que argumentaran sobre rebasabilidad, con más concreción en el ítem A1.1.b, mientras que no se ha dado el caso contrario o se ha dado de manera ligera en el ítem B1.1.a. Aunque en el ítem C1.2 14 de 36 definiciones incluían referencias a la alcanzabilidad y la rebasabilidad (38%).
3. Se han contemplado argumentos aislados caracterizados por un uso de términos exclusivos con gran poder descriptivo tanto para denotar la alcanzabilidad como la rebasabilidad, como son *ser inexacto*, *limitar*, *ser número límite*, *ser número máximo* y *ser tope numérico*.
4. En síntesis, no se han detectado aportaciones relevantes espontáneas de los sujetos acerca de la alcanzabilidad y/o rebasabilidad, salvo en los ítem A1.1.b, A1.1.c y B1.1.b, donde se les ha inducido a referirse a estos tópicos dando lugar a ciertas derivaciones. La variedad de términos clave utilizados dan muestra de un vocabulario común e intuitivo transferido a las técnicas de argumentación matemática de los sujetos sobre los correspondientes ítems.

4.7. Análisis singular de las actividades A1.1, B1.1 y C1.2

En este apartado resumiremos las categorías de respuesta a cada una de las actividades. Desglosaremos cada actividad en sus correspondientes ítems y se realizará un análisis cualitativo de las respuestas a cada uno.

Debido al tamaño de la muestra sólo vamos a detallar las tipologías de respuesta que creemos relevantes y algunos casos particulares de respuestas, de algún modo, novedosas:

Análisis del ítem A1.1.a

Las respuestas generales que se extraen del análisis de este ítem son de los siguientes tipos:

1. *El límite describe el movimiento de la función (ítem Verdadero).* "Formalmente" los estudiantes están aceptando que el límite describe el comportamiento de la función alrededor del punto, en el sentido de determinar el proceso infinito que origina su valor, es decir, identifican el objeto límite con el proceso de obtención.
    a. *El límite determina todos los valores que puede tomar la función.* Una clara identificación del objeto límite con el objeto función.
    b. *El límite describe hacia dónde se dirige, se aproxima o se acerca la función.* Se detecta una ausencia del término "tender", dado que los estudiantes centran su atención en el proceso y no lo consideran como un todo.
2. *El límite no describe el movimiento de la función (ítem falso).* En este caso, los estudiantes ponen de manifiesto la subordinación del valor del límite al proceso que lo origina, y no al revés.
    a. *El movimiento de la función viene descrito por su fórmula algebraica.*
    b. *El límite es el valor al que tiende la función.* Es relevante el uso mayoritario de "tender". Esto justifica en cierta manera la concepción de "tender" como "la denotación de un proceso infinito implícito y con resultado definido".

c. *El límite es un valor aproximado al que se acerca la función sin resultado exacto.*

Análisis del ítem A1.1.b

Las respuestas generales que se extraen del análisis de este ítem son de los siguientes tipos:

1. *El límite es un número o punto que la función no puede rebasar (ítem verdadero).*
   a. *El límite es un valor al que no se llega.*
   b. *El límite es un valor al que se aproxima una función infinitamente sin llegar a él, o simplemente, se aproxima sin llegar a tocarlo ni rebasarlo.*
   c. *El límite es un valor indefinido (la función no lo toma).*
   d. *El límite es una cota de la función*. Las respuestas no se refieren a que el límite es inalcanzable, lo cual es una diferencia respecto a las anteriores categorías.
2. *El límite es un número o punto que la función puede rebasar (ítem falso).*
   a. *El límite es un valor que es inalcanzable e irrebasable.*
   b. *El límite es un punto de referencia, que puede ser superado o alcanzado por la función.*
   c. *Argumentos con ejemplos particulares donde el valor del límite es superado.*
   d. *Caso particular de límite infinito.*

Análisis del ítem A1.1.c

Este ítem se descompone en dos aspectos complementarios: Formas de calcular el límite y alcanzabilidad del límite.

Formas de calcular el límite.

Consideramos unas categorías de respuesta basadas en las de la descomposición genética del concepto de límite de una función en un punto de Cottrill et al, (1996) (ver pág 14), previa adaptación. Dado que la función es arbitraria no podemos construir una descomposición genética global, sino intuir como se comportarían los sujetos en el caso en que la función fuera concreta.

1. *La acción de evaluar f en un sólo punto x que es considerado estar cerca de, o incluso igual a 'a'.*
2. *La acción de evaluar f en unos pocos puntos, cada punto sucesivamente más cerca de a que el anterior, e incluso, igual a 'a'.*
3. *Coordinación de los procesos en dominio y en recorrido.*
   a. *Sin explicitar la bilateralidad.*
   b. *Explicitando la bilateralidad.*
4. *Argumentos que denotan una confusión entre la variable dependiente y la independiente.*

Referencias a la alcanzabilidad del valor del límite

En general, algunos sujetos han considerado el valor del límite inalcanzable pero aproximable.

Análisis del ítem B1.1.a

Las respuestas generales que se extraen del análisis de este ítem son de los siguientes tipos:

1. *El límite es un número o punto que la función no alcanza (ítem verdadero).*
   a. *El límite es un valor al que la función se acerca o se aproxima pero nunca alcanza o llega.*
   b. *Cuando la función tiende al límite "nunca es exacto".*
   c. *El límite es una recta o conjunto infinito de puntos a los que la función se acerca pero nunca alcanza.*
   d. *Límite como "fin" de la función.*
   e. *Referencia al infinito en dominio.*
2. *El límite es un número o punto que la función puede alcanzar (ítem falso).*
   a. *La función alcanza el límite pero no puede rebasarlo.*

b. *Caso particular de límite infinito.*

Análisis del ítem B1.1.b

Las respuestas generales que se extraen del análisis de este ítem son de los siguientes tipos:

1. *El límite es una aproximación que puede hacerse tan precisa como se quiera.*
   a. *La precisión de la aproximación al límite depende de la precisión de la aproximación al valor al que tiende x.*
2. *La precisión no es arbitraria.*
   a. *La precisión está determinada.*
   b. *La precisión está acotada.*
   c. *La precisión es irrelevante.*
   c. *La precisión depende de la función y de los valores de x.*
   d. *El límite es un tope numérico no aproximativo sino concreto.*

Análisis del ítem B1.1.c

Debido al pequeño tamaño de la muestra (10 respuestas válidas de 18 respuestas), no nos ha sido posible definir las categorías de manera exhaustiva debido a falta de ejemplos representativos. Sólo presentamos los descriptores de las respuestas que consideramos más relevantes.

1. *Los valores de $f(x)$ no se acercan de manera arbitraria al límite, sino que depende de los valores de x.*
2. *Los valores de $f(x)$ se acercan de manera aproximada al límite, no arbitraria.*
3. *Los valores de $f(x)$ se acercan de manera monótona y arbitraria al límite.*

Análisis del ítem C1.2

Esta actividad dio lugar a 36 definiciones de límite de una función en un punto (18 definiciones de los alumnos que respondieron al cuestionario A y 18 definiciones de los que respondieron al cuestionario B).

Antes de abordar el análisis de este ítem surge la duda de que las definiciones aportadas pudieran venir condicionadas por las cuestiones planteadas en los ítems A1.1.a, A1.1.b, A1.1.c, B1.1.a, B1.1.b y B1.1.c[3], singularmente por los términos y propiedades que expresan. Si bien no tenemos garantía de que los términos empleados sean propios, consideramos que las definiciones dadas aportan información sobre la imagen conceptual.

La tabla 4.4 proporciona una medida del grado de coincidencia de las definiciones con los ítems anteriores.

Tabla 4.4.
Medida del grado de coincidencia de los ítems de las actividades A1.1 y B1.1 con las definiciones

Grado de coincidencia	**ÍTEMS A**			**TOTAL (A)**	**ÍTEMS B**			**TOTAL(B)**
	A1.1.a	A1.1.b	A1.1.c		B1.1.a	B1.1.b	B1.1.c	
Adapt.	6	5	2	10[1]	9	2	1	9
Text.					1	1	1	2
Total/ítem	6	5	2	10	10	3	2	11
Original.				7				7
NS/NC				1				

[*] Leyenda: **Adapt.**Significa que la definición contiene una modificación del enunciado del ítem o la copia textual y/o modificación de la respuesta dada al mismo.// **Text.**Significa que la definición contiene una copia textual del ítem o parte del mismo.// **Original**. La definición no contiene indicios detectables coincidencia con ningún ítem.

[1] Una definición puede estar sometida a varios tipos de coincidencia con varios ítems, por lo que el total por filas no se considerará como la suma de cada uno de los elementos.

Podemos concluir que las definiciones personales responden a las mismas concepciones básicas en los dos cuestionarios (55.56%, A) y (61.11%, B). Las copias textuales que se detectan son mínimas (11.11%), en el caso del cuestionario B. Los ítems con mayor número de coincidencias han sido A1.1.a (33.33%) y B1.1.a (90.91%)

[3] En ocasiones, consideran el propio aserto como parte de la definición personal.

Tipología de las definiciones personales

A la hora de analizar los tipos de definiciones personales, vamos a considerar las 36 definiciones resultantes de reunir las 18 definiciones del cuestionario A y las 18 definiciones del cuestionario B. La muestra es pequeña y nuestro estudio es exploratorio, por tanto vamos a considerar sólo respuestas relevantes que podamos agrupar en categorías amplias de definiciones.

En la tabla 4.1 presentamos el registro de definiciones según términos clave de proceso (aproximar, acercarse, tender, etc.) utilizados por alguno de los escolares.

Las definiciones que contienen referencias a la alcanzabilidad o rebasabilidad del límite se encuentran clasificadas según términos clave en la tabla 4.3.

Vamos a enumerar respuestas que consideramos relevantes y descartamos aquellas otras que no proporcionan suficiente información, bien porque no son coherentes o bien porque su significado global es impreciso. Estos son los tipos de respuesta:

1. *Confusión de la variable dependiente con la independiente.*

   Dentro de esta tipología situamos las respuestas en las que el límite sólo se aplica a la variable x, notándose una exclusión de la variable y.

2. *Naturaleza del valor del límite.*

   En este tipo se incluyen respuestas que asignan al valor del límite otra naturaleza distinta a ser un valor concreto y exacto. Estas son las distintas variantes que se asocian a las respuestas de los estudiantes.

   a. *El límite es un valor aproximado, no exacto.*
   b. *Límite como un "objeto" que impide que la fución se represente gráficamente*[4].
   c. *Límite con naturaleza de conjunto de valores*[5].

[4]Puede denotar una idea de límite como "hueco" en la gráfica,donde existe una indefinición de la función en el punto donde se estudia el límite.

[5]Es posible que se asocie al límite una naturaleza dual de proceso y objeto.

4.8. Conexión entre definición personal y uso en la representación gráfica

Finalizado el análisis de las definiciones personales pasamos al análisis de cómo los estudiantes aplican sus definiciones personales para justificar la existencia o no de límite en ciertos puntos a partir de la información suministrada en el sistema de representación gráfico. Generalmente no llegan a aplicarlas de manera coherente ya que hacen uso de la "definición oficial" recibida de su profesor o de su propia imagen conceptual subyacente.

Antes de pasar a su análisis destacamos dos importantes distractores presentes en la tarea A2.

1. Las "flechas" que forman parte de las representaciones gráficas (A2.a, A2.b y A2.c), que expresan que la función se extiende a todo $\mathbb{R}$. Los estudiantes no estaban familiarizados con esta notación, por lo que cual estimamos necesario revisar el libro de texto que manejen los sujetos para controlar este distractor de tipo *representación* antes de confeccionar las tareas. Lo relevante no es que los sujetos no comprendan el significado de las flechas, sino que les llama la atención, las malinterpretan y las utilizan en sus argumentos.
2. El término "punto indicado" es un distractor ya que el punto tiene doble naturaleza en cálculo ($x = a$, $(a, f(a))$ o $y = L$); así, parece influir en algunas de las respuestas que ejemplificaremos más adelante.

Análisis del ítem A2.a

La representación gráfica asociada representa una función continua y lineal, por lo que la complejidad es baja y no esperábamos que los estudiantes tuvieran problemas para abordarla, salvo posibles distractores como en este caso las flechas.

No vamos a categorizar de manera exhaustiva las respuestas, sino que vamos a ejemplificar aquéllas que contienen indicios de uno o varios distractores y aquéllas otras que consideremos relevantes.

1. *Distractores de tipo representación, “flechas”.*

   A pesar de la sencillez de la función, hemos detectado 4 respuestas que han sido afectadas por el elemento “flecha” presente en su representación gráfica. Ejemplificamos una de ellas en la figura 5.1 (Anexo V, Apartado V.1).

2. *Distractor de tipo verbal, “punto indicado”.*

   Sólo hemos detectado una influencia de distractor “punto indicado” en la que el sujeto identifica el “punto indicado”, posiblemente, con el par $(3, f(3))$. El sujeto tiene una concepción de límite como valor inalcanzable e irrebasable por lo que es correcto que no exista el límite, pero el sujeto menciona que el punto $(3, f(3))$ no es límite (Ver figura 5.5 en el Anexo V, Apartado V.2).

3. *Identificación del límite como imagen del punto.*

   Consideramos relevante presentar respuestas que muestran la persistencia de la concepción de límite como imagen del punto observados en investigaciones anteriores. Supone un obstáculo importante en el aprendizaje de los sujetos (Ver figura 5.8 en Anexo V, Apartado V.3).

3. *Confusión de la variable dependiente con la independiente*

   Consideramos relevante presentar respuestas que muestran una confusión entre las variables de una función a la hora de calcular el valor del límite (Ver figura 5.12 en Anexo V, Apartado V.4).

Existen otras respuestas que no tenemos evidencia de que sean objeto de los distractores, porque la definición personal asociada involucra que el valor del límite debe ser inalcanzable e irrebasable, luego este aspecto “oculta” la influencia del distractor. No obstante, tal como está redactada la tarea son argumentos correctos, aunque las concepciones sean erróneas (Véase la figura 5.2 en el Anexo V, Apartado V.1).

Análisis del ítem A2.b

La representación gráfica está asociada a una función de tipo “valor absoluto”, con límite en el punto x=1 igual a 1 y distinto de la imagen 2, por lo que la complejidad es más alta respecto de la gráfica A2.a, luego la influencia de los distractores “flecha” y “punto indicado” suponemos que será más acusada.

1. *Distractores de tipo representación, “flechas”.*

   Detectamos 5 casos del distractor “flecha”, que no difieren mucho del caso anterior. Ejemplificamos alguna de las respuestas (Ver figura 5.3 en Anexo V, Apartado V.1).

2. *Distractor de tipo verbal, “punto indicado”.*

   Hemos detectado dos influencias del distractor “punto indicado”, similar también al caso anterior A2.a. Presentamos una de ellas (Ver figura 5.6 en Anexo V, Apartado V.2).

3. *Límite como cambio brusco del comportamiento de la función.*

   En la figura 5.14 (Anexo V, Apartado V.5) se muestra una interpretación de la existencia de límite en un punto por cambio brusco del comportamiento de la función en el punto, en este caso, un cambio de dirección acusado.

3. *Identificación del límite como imagen del punto.*

   El uso de esta representación gráfica permite detectar de manera más clara la identificación del límite como imagen del punto, el cual está de alguna manera oculta cuando la representación gráfica está asociada a una función continua (ítem A2.a). No obstante existen respuestas que afirman que el punto no ha de tener necesariamente imagen (Ver figuras 5.9 y 5.10 en Anexo V, Apartado V.3).

Análisis del ítem A2.c

La representación gráfica asociada tiene un nivel alto de complejidad porque tiene una forma sencilla de “trozos de rectas” lo cual es probable que establezca conflicto con las representaciones a los que están acostumbrados los estudiantes (“una recta continua sin trozos”). Pero a esto le unimos que la función no está definida en el punto x=2 y la presencia de los distractores correspondientes “punto indicado” y “flechas”.

1. *Distractores de tipo representación, "flechas".*

   Detectamos solamente 2 presencias del distractor "flecha", lo cual no era lo esperado debido a la alta complejidad a priori de la representación gráfica. Ejemplificamos una de ellas (Ver figura 5.4 en Anexo V, Apartado V.1).

2. *Distractor de tipo verbal, "punto indicado".*

   Hemos detectado una sola influencia notable del distractor "punto indicado" (Ver Figura 5.7[6] en Anexo V, Apartado V.2).

3. *Identificación del límite como imagen del punto.*

   El uso de esta representación gráfica pone de manifiesto la necesidad que imponen los sujetos de que esté definida la función en el punto para la existencia de límite (Ver Figura 5.11[7] en Anexo V, Apartado V.3).

4. *Confusión de la variable dependiente con la independiente.*

   El error de confusión de variables está presente en algunas de las respuestas (Ver figura 5.13 en Anexo V, Apartado V.4).

5. *Límite como lugar donde se produce un cambio brusco de la función.*

   Es característico que algún sujeto conciban el límite como valor de la abscisa, en este caso x=-2, donde se produce un corte brusco ya que la función no está definida en x=-2 (Ver figura 5.15 en anexo V, Apartado V.5).

En conclusión, para la actividad A2 podemos afirmar que la influencia de los distractores ha sido relativamente pequeña y que persiste la identificación del límite con la imagen. Se observan también casos de confusión de variables y se han manifestado otras interpretaciones novedosas como: la identificación del límite con el cambio brusco del comportamiento de la función en el punto. El resto de respuestas no consideradas son imprecisas y no proporcionan información relevante sobre las imágenes conceptuales de los sujetos correspondientes.

[6] Se detecta también una confusión entre la variable independiente y la dependiente.

[7] Este sujeto no identifica el límite con la imagen, pero es posible que considere condición imprescindible para hablar de límite que la función esté definida en el punto.

4.9. Análisis de los registros simbólicos de la actividad B2

Como último apartado del análisis de los datos que hemos desarrollado se encuentra el de la actividad B2 tarea consistente en asignar dos propiedades simbólicas[8] a cada una de las cuatro gráficas (B2.f1, B2.f2, B2.f3 y B2.f4) que se ofrecen.

Presentamos un resumen de los resultados extraídos de los registros simbólicos derivados de la actividad. En la tabla 4.5 se muestran las frecuencias de respuestas sobre las propiedades asignadas a cada una de las gráficas: El total máximo posible de respuestas era de 144 (8 máximo por cada uno de los 18 sujetos); el total de repuestas obtenidas ha sido de 103, ya que algunos sujetos sólo propusieron una de para alguna de las gráficas.

Tabla 4.5.

Tabla de frecuencias de las propiedades según los distintos ítems

PROP.	**ÍTEMS**				**TOTAL**
	B2.f1	B2.f2	B2.f3	B2.f4	
a) $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$	2	12	2	2	18
b) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$	2	8	5	5	20
c) $\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$	9	1	8	3	21
d) $f(1) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$	4	1	2	3	10
f) $f(1) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$	2	1	2	3	8
g) $f(1) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$	6	1	2	2	11
h) $f(1) \neq \lim_{x\to 1} f(x)$	3	1	5	6	15
Total/ítem	28	25	26	24	N=103

[8] Ya se aclaró anteriormente que las propiedades se denominan a), b), c), d), f), g), h), excluyéndose la e) por la errata en la elaboración del cuestionario.

Contradicciones puestas de manifiesto por los sujetos

Debido a que los sujetos podían elegir dos propiedades, existen combinaciones de *propiedades contradictorias o incompatibles*, es decir, son aquéllas que no se pueden cumplir de manera simultánea. La aparición de contradicciones en las respuestas de los individuos, proporciona información sobre déficits en el desarrollo del razonamiento lógico como parte esencial del pensamiento matemático avanzado.

La tabla 4.6 muestra los tipos de combinaciones contradictorias de las siete propiedades y sus frecuencias de aparición en los registros simbólicos de los 18 sujetos.

Tabla 4.6.

Tabla de frecuencias de las contradicciones que han aparecido en los ítems

Contradicciones.	**ÍTEMS**				**TOTAL**
	B2.f1	B2.f2	B2.f3	B2.f4	
a) / c)		1	1	1	3
a) / d)	1	1			2
a) / f)	1	1			2
b) / c)			1		1
b) / d)	1		1	1	3
c) / h)	2		5	1	8
Total	5	3	8	3	*N*=19

Mostramos en las figuras 4.1[9] y 4.2 gráficos que contienen las frecuencias de las distintas respuestas de los sujetos con sus correspondientes valoraciones cualitativas.

[9] Se han excluido las respuestas de dos sujetos que respondieron en registro verbal y una respuesta de un sujeto referente al ítem B2.f2 que ha sido el único que había inventado una propiedad e), luego la errata mencionada ha sido un distractor leve.

Figura 4.1.

Gráfico de frecuencias de las respuestas y valoraciones cualitativas

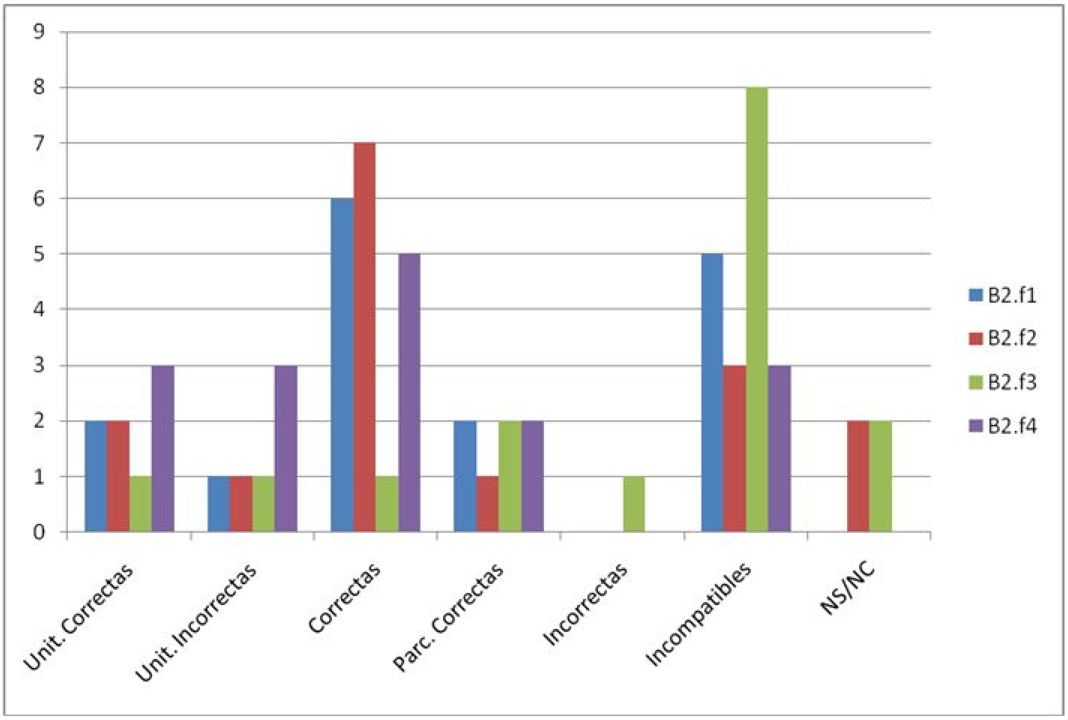
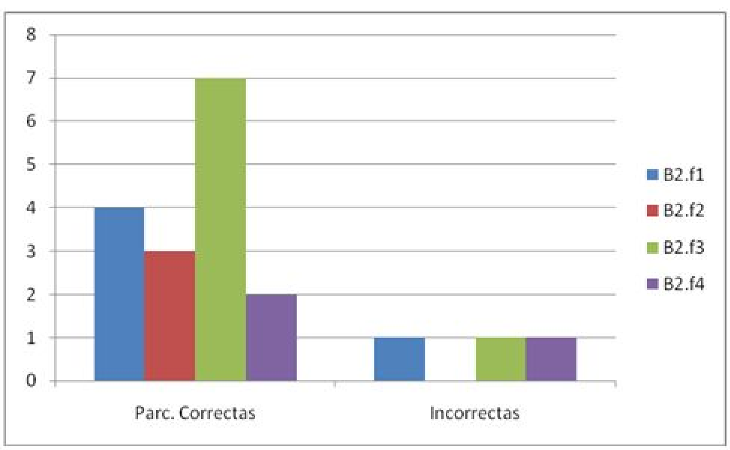


Figura 4.2.

Gráfico de frecuencias de las respuestas incompatibles desglosadas en sus valoraciones cualitativas



Discusión de los resultados procedentes del análisis de la actividad B2

Estos son los resultados que podemos extraer de la interpretación de las tablas y figuras anteriores:

1. *Ítem B1.f1.* Las tres propiedades más relevantes que los sujetos globalmente han asignado a la gráfica (B1.f1) son las propiedades c)(9), g)(6) y d)(4), que ponen de manifiesto:
   - En primer lugar, que la función presenta límites laterales distintos en el punto x=1,
   - en segundo lugar, que la imagen de la función en x=1 difiere del límite lateral por la izquierda, y
   - en tercer lugar, que la imagen de la función en x=1 es igual al límite lateral por la derecha que a su vez es distinto al lateral por la izquierda.

   luego en conjunto los sujetos han expresado propiedades correctas de la función (B1.f1).

2. *Ítem B1.f2.* Las dos propiedades más relevantes que los sujetos en global han asignado a la gráfica (B1.f2) son las propiedades a)(12) y b)(8), que ponen de manifiesto:
   - En primer lugar, que la función tiene límite en el punto x=1 y que coincide con la imagen del punto, y
   - en segundo lugar, que los límites laterales de la función en el punto x=1 son iguales.

   Se puede decir que, en conjunto, se han resaltado las propiedades más importantes que cumple una función continua en un punto, estas son: que existen los límites laterales, que éstos coinciden, luego existe límite, y que éste coincide con la imagen del punto.

3. *Ítem B1.f3.* Las tres propiedades más relevantes que los sujetos conjuntamente han asignado a la gráfica (B1.f3) son las propiedades c)(8), b)(5) y h)(5), que ponen de manifiesto:
   - En primer lugar, los límites laterales en el punto x=1 son distintos;
   - en segundo lugar, los límite laterales en el punto x=1 coinciden, y

- en tercer lugar, el límite de la función en el punto x=1 coincide con la imagen.

Podemos afirmar que en conjunto, una mayoría de los sujetos expresa de manera correcta que los límites laterales en el punto x=1 son distintos, pero existe una parte relevante de los mismos, que identifican los límites laterales (con la imagen del punto posiblemente) o el límite con la imagen del punto, lo cual manifiesta respuestas erróneas. Es evidente por tanto que la representación gráfica asociada a la función 3 ha añadido cierta complejidad al ítem debido a la existencia de a un número considerable de respuestas erróneas en cuanto a su descripción se refiere.

4. *Ítem B1.f4.* Las dos propiedades más relevantes que los sujetos en global han asignado a la gráfica (B1.f3) son las propiedades h)(6), b)(5), que ponen de manifiesto:

   - En primer lugar, que existe el límite de la función en x=1 y que difiere de la imagen del punto x=1, y
   - en segundo lugar, los límites laterales en el punto x=1 son iguales.

   Podemos decir que se han resaltado las propiedades fundamentales de la función 4, es decir, que los límites laterales en el punto x=1 son iguales, y en consecuencia existe límite, pero éste último difiere de la imagen del punto x=1.

5. En cuanto a las respuestas incompatibles,los ítems B2.f3 y B2.f1 son las que mayor frecuencia de respuestas incompatibles generan, mientras que B2.f2 y B2.f4 son las que menos. La frecuencia de respuestas contradictorias la podemos considerar como un indicador de la complejidad de las gráficas, pues de alguna manera se ajustan al orden de complejidad que a priori asignamos a las gráficas que fue el siguiente:

   1º. La función B2.f2 es continua, luego es la más sencilla y de menor complejidad, esto se corresponde con el dato de ser la que menos incompatibilidades tiene asociadas (3).

2º. La función B2.f4 tiene una discontinuidad evitable en x=1, es decir, existe el límite en x=1 pero la imagen es distinta. Por tanto aumenta ligeramente la complejidad, lo cual no altera significativamente las incompatibilidades (3).

3º. La función B2.f1 tiene una discontinuidad de salto en x=1, esto es, existen los límites laterales y son distintos, pero la imagen coincide con uno de ellos, por tanto aumenta la complejidad de la gráfica con el consiguiente aumento de las incompatibilidades (5).

4º. La función B2.f3 dentro del contexto límite finito de una función en un punto, es la que menos regularidades tiene, pues existen los límites laterales, son distintos y además ninguno coincide con la imagen del punto, por lo que la complejidad es máxima y se traduce en un aumento relevante de las incompatibilidades (8).

6º. Se puede observar que la frecuencia de respuestas correctas es superior a la de las incorrectas, que se reducen básicamente a las del apartado B2.f3, por lo que existe una notable evidencia de que los estudiantes en general tienen un manejo adecuado de la simbología, siendo el error más común las contradicciones o propiedades incompatibles, no obstante, la tabla 4.2 muestra ampliamente que al menos una de las respuestas que dan los sujetos es correcta, por lo que se detecta cierto déficit en el razonamiento lógico. Esto muestra que el libro de texto y el profesor pueden hacer más hincapié en los sistemas de representación simbólico y gráfico, que en el verbal.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES FINALES DE LA INVESTIGACIÓN

Este capítulo tiene como objetivo resumir las conclusiones deducidas del estudio descrito en los capítulos anteriores, en cuanto a los resultados extraídos del análisis, las limitaciones puestas de manifiesto y las sugerencias de continuidad para estudios futuros.

El estudio se inició con el objeto de describir y sistematizar los significados referentes al concepto de límite de una función en un punto puestos de manifiesto por los estudiantes de primer curso de bachillerato en diferentes sistemas de representación, verbal y simbólico en nuestro caso.

Nuestro propósito inicial fue la construcción de un instrumento que recogieran distintas interpretaciones verbales y simbólicas de los estudiantes de primer curso de bachillerato respecto a diferentes facetas del concepto de límite expresadas en los registros verbal, gráfico y simbólico. Una vez diseñado, redactado y validado mediante triangulación de investigadores, se llevó a cabo su puesta en práctica.

Punto central de esta investigación fue la caracterización de los diferentes usos y significados de los términos clave que los sujetos emplean para describir sus interpretaciones sobre diversas propiedades del concepto de límite.

En general, se han satisfecho las expectativas planteadas, en el sentido en que hemos comprobado que aparte de los significados del concepto de límite que reportan algunas investigaciones precedentes, se ponen de manifiesto nuevos componentes que enriquecen y amplían dichos significados, los cuales surgen de manera natural o inducida por los diversos ítems del cuestionario.

5.1. Conclusiones referentes al análisis de los registros verbales

Conclusiones extraídas del ítem A1.1.a

(1) No se puede obtener evidencia notable de que los estudiantes que consideran verdadero el aserto asocien una propiedad de proceso al objeto límite, sólo se detecta una identificación aparente entre el límite y la función global. Los términos más frecuentes son “aproximarse”, “acercarse” y “dirigirse”.

(2) Por otro lado, se observa un uso mayoritario del término “tender” para justificar que el aserto es falso, pero no hay evidencias para negar la posible naturaleza procesual del objeto límite que los sujetos puedan interpretar, al igual que no se descarta que el uso de “tender” se realice para simplificar el proceso que da lugar al límite, es decir, un uso técnico por definición[1].

Conclusiones extraídas del ítem A1.1.b

(1) El resultado más relevante es que la mayor parte de los sujetos que afirman que el límite no puede rebasarse, justifican su interpretación mediante la no alcanzabilidad del valor. Combinando ambas interpretaciones, se puede poner de manifiesto que el límite para los estudiantes tiene una propiedad de ser *cota inalcanzable*. El límite no se identifica con el valor de la función en el punto; la noción de continuidad no se contempla en este caso. Sólo un sujeto justifica que el límite no es rebasable sin mencionar nada referente a su alcanzabilidad. El uso de la expresión “aproximarse infinitamente” denota el uso implícito del sistema de representación numérico y el uso de la expresión “no se puede realizar la operación de la función” denota usos implícitos del sistema de representación gráfico (“hueco”) y simbólico (“indeterminación”)

[1] Esta reflexión surge después de observar que el uso de “tender” disminuye en el resto de los ítems, que se caracterizan por referirse a aspectos del proceso infinito vinculado al concepto de límite, salvo en el C1.2, donde vuelve a aparecer para describir la definición de límite.

vinculada probablemente a una idea de función como "fórmula" recogida por Vinner (1983).

(2) Por otro lado, los que afirman que el límite es rebasable suelen utilizar ejemplos que apoyen su decisión, o bien, introducen el ejemplo particular de límite infinito.

Conclusiones extraídas del ítem A1.1.c

(1) En primer lugar, algunos sujetos se refieren a la forma de calcular el límite, la cual se puede describir mediante los pasos 1, 2 y 3 definidos a partir de la descomposición genética de Cottrill et al. (1996). Observamos maneras de calcular el límite desde la forma más básica (*evaluar en el punto a, o en unos pocos puntos cercanos*) hasta la forma más compleja pero informal, que implica *la aproximación bilateral* al punto, con algunos errores vinculados a la confusión de las variables dependiente e independiente. La propia redacción del ítem impedía valorar las aproximaciones de los sujetos a los siguientes pasos de la descomposición genética y, en definitiva, a la definición formal.

(2) En segundo lugar, otros sujetos se refieren a que el límite es un valor inalcanzable, debido la presencia del término "alcanzar" en el enunciado del ítem desviando su atención de los demás aspectos del mismo. Este distractor no ha ejercido una influencia relevante en las respuestas de los sujetos.

Conclusiones extraídas del ítem B1.1.a[2]

(1) Al contrario que en el ítem A1.1.b, los sujetos no se refieren a la rebasabilidad del límite para argumentar sobre su posible alcanzabilidad, sólo en casos aislados se menciona que el límite es alcanzable pero no rebasable. Las expresiones más características utilizadas por los estudiantes para describir que el límite es inalcanzable son "no llega" y "nunca son exactos" relacionados posiblemente con una idea gráfica y numérica respectivamente de límite. Es

[2] No se ha restringido el dominio, a pesar de que se restringió el valor finito del límite por lo que los estudiantes han tenido "libertad" para referirse a infinito en sus argumentos, pero no ha sido lo más frecuente.

interesante la respuesta de un sujeto que afirma que si la función alcanzara el límite, ésta tendría “fin”.

(2) Sólo una pequeña parte de los sujetos afirma que el límite es alcanzable (4 de 18) pero ponen de manifiesto que no es superable por lo que la idea de límite como extremo de una función persiste entre los significados que los estudiantes asocian al concepto de límite de una función en un punto o en infinito.

Conclusiones extraídas del ítem B1.1.b

(1) Aunque no le hemos prestado atención, los estudiantes interpretan de manera diferente lo que entienden por *precisión* y no se puede, de momento, inferir sus significados personales globales, pero sí diferentes características como que *la precisión de la aproximación al límite es ilimitada pero dependiente de la precisión de la aproximación al punto donde se realiza al estudio*.

(2) Los que consideran el aserto falso proporcionan diversas interpretaciones como: *La precisión está determinada y no es manipulable a voluntad; La precisión está acotada (debido a la imposibilidad física de realizar el proceso numérico infinito vinculado); La precisión es irrelevante; y la precisión depende de la función y de los valores de x.*

Conclusiones extraídas del ítem B1.1.c[3]

(1) Algunos sujetos ponen de manifiesto la ausencia de arbitrariedad, remarcando la dependencia de la variable dependiente respecto a la independiente.

(2) Los estudiantes que sí consideran la arbitrariedad del acercamiento de la función al límite añaden, además, la monotonía creciente o decreciente y matizan que dicha arbitrariedad está sujeta a la de los valores de x que se aproximan al punto.

[3] Este ítem está planteado en términos técnicos, lo cual ha podido provocar confusión en los sujetos traduciéndose en un número reducido de respuestas válidas (10 de 18).

Conclusiones extraídas del ítem C1.2

(1) Las definiciones asociadas al ítem C1.2 han sufrido cierta influencia de las respuestas a los ítems analizados anteriormente, por lo que consideramos necesario esclarecer el grado de coincidencia de las respuestas a este ítem con las ya comentadas de los ítems anteriores. Como se puede ver en la tabla 4.4 donde se organizan los tipos de argumentos usados en las respuestas aportadas a las distintas preguntas, los datos aportados por los cuestionarios A y B muestran una coincidencia del 55.56% y del 61.11%, respectivamente, muestran que más de la mitad de la definiciones aportadas al ítem C1.2 parecen derivarse de los enunciados que la preceden, si bien no se detecta copia textual en el cuestionario A y sólo del 11.11% en el cuestionario B. Los términos que más han influido en las respuestas han sido los referidos a rebasabilidad (cuestión A1.1.a (33.33%)) y alcanzabilidad (cuestión B1.1.a (90.91%)). Esto indica que los sujetos utilizan de manera reiterada términos clave referentes a estos aspectos para enunciar su definición personal de límite de una función en un punto.

(2) Se pueden destacar dos categorías amplias de definiciones incorrectas, la primera, denominada *Confusión de la variable dependiente con la independiente*, en la que se agrupan aquellas definiciones en las que sólo aparece la variable ‘x’ y se excluye la ‘y’. La segunda categoría, denominada *Naturaleza del valor del límite*, engloba aquellas respuestas que consideran al límite como un valor, exacto o aproximado, un “objeto” que impide que la función se represente gráficamente (equivalentemente, desde nuestra interpretación, a un hueco en la gráfica de la función) y un conjunto de valores (se denota una dualidad entre objeto y proceso). Las definiciones también se expresan con “términos de proceso” recogidos en la tabla 4.1 y con “términos de alcanzabilidad y rebasabilidad” en la tabla 4.3, que son intuitivos y comunes, poniendo de manifiesto que los sujetos no utilizan un lenguaje técnico muy elaborado

en sus definiciones, haciendo prevalecer algunas de sus concepciones originales y dando un uso poco elaborado de la terminología específica recibida en la instrucción previa.

Conclusiones extraídas de la actividad A2

(1) De esta actividad se destaca la presencia probable de ciertos distractores presentes en la gráfica[4] que hemos denominado "flecha" y "punto indicado", de tipo gráfico y verbal, respectivamente. Sin embargo, es necesario advertir, afortunadamente, que tal influencia en los ítems A2.a, A2.b y A2.c ha sido inferior del 30% (flecha) y del 20% (punto indicado).

(2) No hay información suficiente para valorar si los estudiantes aplican de manera coherente las definiciones personales ya que suelen ser incompletas o imprecisas, no precisan si están argumentando de acuerdo a la definición oficial dada por el profesor o el libro de texto, o si utilizan otros significados del concepto de límite no recogidos en sus propias definiciones para interpretar las gráficas.

(3) Otros aspectos a resaltar de entre de los argumentos que emplean los sujetos son: *identificación del límite con la imagen del punto; límite como lugar donde cambia de manera brusca la función, ya sea de dirección o un salto; y errores ligados a la confusión de la variable independiente y dependiente.*

En general, los argumentos son muy intuitivos e informales, sin un grado suficiente de elaboración, pero se aprecia una mejor expresión de las nociones básicas cuando se cuenta con algún apoyo gráfico que cuando no se dispone de él. El resultado más novedoso es la interpretación del límite como lugar donde cambia de manera brusca la función, que no hemos detectado en la literatura revisada. Tal interpretación afirma la existencia pero no concreta el valor específico del límite.

[4] No podemos afirmar con seguridad que hayan sido influyentes en las respuestas de los sujetos, pues es posible que existan otras variables extrañas que se escapan de nuestro control.

5.2. Conclusiones referentes al análisis de los registros simbólicos

Dado que en la actualidad, la enseñanza del límite de la función en el punto tienen como foco principal las técnicas algebraicas para el cálculo de límites y el lenguaje simbólico, presentamos unas conclusiones que se centran, en gran medida, sobre el manejo adecuado de la simbología por parte de los sujetos de nuestro estudio, preponderado sobre un desarrollo medio-bajo de los argumentos y formas de expresión verbal.

Conclusiones globales de la tarea B2

(1) En primer lugar, los sujetos en general han asignado propiedades correctas a cada una de las gráficas, las más frecuentes han sido: la propiedad c) $\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$ para las gráficas B2.f1 y B2.f3; la propiedad a) $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$ para la gráfica B2.f2; y la propiedad b) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$ para la gráfica B2.f4.

(2) En segundo lugar, centrando la atención en la actuación individual de cada uno de los sujetos frente a la actividad B2, se destaca la presencia de ciertas contradicciones debidas a ciertas elecciones de las dos propiedades exigidas para cada gráfica. El número de respuestas incompatibles informa de la complejidad de cada una de las gráficas, que se corresponde con la que nosotros percibimos a priori. De esta manera las gráficas ordenadas de menor a mayor por el número de incompatibilidades asociadas son: B2.f2 (3 incompatibilidades / *función continua*), B2.f4 (3 incompatibilidades / *discontinuidad evitable*), B2.f1 (5 incompatibilidades / *discontinuidad de salto, con imagen igual a uno de los límites laterales* y B2.f3 (8 incompatibilidades / *discontinuidad de salto, con imagen distinta de los dos límites laterales*). Es relevante que, al menos, una de las dos propiedades asignadas en las respuestas es correcta, lo cual implica que reconocen propiedades correctas de la gráfica, pero aún no son capaces de distinguir de manera lógica las contradicciones que aparecen.

(3) En tercer lugar, aunque no hayamos realizado el análisis detallado de las respuestas de dos sujetos que han interpretado de manera verbal las gráficas comunicamos otros resultados interesantes como la posible, pero no comprobada empíricamente, identificación de la continuidad de una función con su estricta monotonía.

Hemos descrito la gama de significados que pueden poner de manifiesto los estudiantes del concepto de límite favorecidos por la instrucción previa recibida y para ello hemos caracterizado, de alguna manera, el lenguaje común y cotidiano utilizado para comunicar las distintas interpretaciones. Se confirman algunos significados detectados en investigaciones anteriores, tales como que el límite es inalcanzable o cota, pero aparecen otros nuevos, como la identificación del límite como lugar donde se produce un cambio brusco del comportamiento de la función en el punto.

5.3. Limitaciones de la investigación

Entre las limitaciones de la investigación se señala el tamaño reducido de la muestra elegida de manera intencional y por disponibilidad. Además la recogida de datos se realizó en un momento concreto y no a lo largo de un periodo mas amplio de trabajo, por lo que se dispone de evidencias sobre el cambio y desarrollo de tales significados, para lo cual es necesario disponer de información de varios momentos del proceso de aprendizaje de los sujetos.

Se reconocen también ciertas limitaciones del propio instrumento de recogida de datos, debidas a la presencia de distintos distractores y otras variables extrañas fuera de nuestro control. Estas limitaciones deberán corregirse para futuras aplicaciones.

5.4. Sugerencias para investigaciones futuras

Este trabajo tiene su foco principal en la relación de significado concepto-sistemas de representación. Su continuidad la establecemos en la incorporación del análisis fenomenológico con la búsqueda de situaciones de modelización y resolución de problemas que den sentido al concepto de límite de una función en un punto.

Nos proponemos experimentar una propuesta innovación curricular para la enseñanza del concepto de límite de una función en un punto con alumnos de primer curso de bachillerato, basada en una metodología de investigación- acción. El marco teórico tiene su fundamento base en la noción de significado que hemos presentado en esta memoria, donde incorporamos la fenomenología del concepto de límite, ámbito de investigación en este grupo cuyo principal exponente es el trabajo de Claros (2010).

REFERENCIAS

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003) Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana,Vol. X*, No. 2, pp. 135- 149.

Azcárate, C., Camacho M. y Sierra M. (1999). Perspectivas de investigación en didáctica de las matemáticas: Investigación en didáctica del análisis. En Ortega del Rincón, T. (Coord.) *Actas del III Simposio de la SEIEM*. Valladolid .

Blázquez, S. y Ortega, T. (1998). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *Aula*, 10, 119-135.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *4*(3), 219-236.

Blázquez, S., Gatica, N. y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)*, *12*(1), 145-168.

Bokhari, M. A. & Yushau, B. (2006). Local (L,ε)-approximation of a function of single variable: an alternative way to define limit.*International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *37*(5),515-526.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En Rico,L. (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.

Claros, F.J. (2010). *Límite finito de sucesiones: Fenómenos que organiza*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Cooley, L. (2002). Writing in calculus and reflective abstraction. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*(3), 255-282.

Cornu, B. (1991). Limits. In Tall, D. (Ed.) .*Advanced Mathematical Thinking*.(pp. 153-166). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J., Dubinsky, Ed., Schwingendorf, K., Thomas, K., Nichols D. & Vidakovic D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167-192.

Davis, R.B. & Vinner, S. (1986). The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconceptions Stages. *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281-303.

Dubinsky, Ed. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In Tall, D. (Ed.).*Advanced Mathematical Thinking*.(pp. 95-126). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Edwards, B.S., Dubinsky, Ed. & McDonald, M.A. (2005). Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 15-25.

Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T., & Zoulinaki, F. (2009). Geometric and algebraic approaches in the concept of "limit" and the impact of the "didactic contract". *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*(4), 765-790.

Fernández-Plaza, J.A. (2010). *Unidad Didáctica: Límite y Continuidad de Funciones*. Memoria final del Máster universitario de profesorado de educación secundaria obligatoria, bachillerato, formación profesional y enseñanza de idiomas (especialidad de matemáticas). Granada: Universidad de Granada.

Frege, G. (1996a). Sobre sentido y referencia. En Mosterín J.(Ed.). *Escritos Filosóficos*. Barcelona: Crítica.

Frege, G. (1996b). Consideraciones sobre sentido y referencia. En Mosterín J.(Ed.). *Escritos Filosóficos*. Barcelona: Crítica.

Frege, G. (1996c). Función y concepto. En Mosterín J.(Ed.). *Escritos Filosóficos*. Barcelona: Crítica.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Gray E.M. & D.O Tall (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic, *The Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 115- 141.

Harel, G. & Sowder L. (2005). Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. *Mathematical thinking and learning*, *7*(1), 27-50

Hastings N.B. & Reynolds B.E. (1999). *Workshop calculus with graphing calculators*. (Vol. 1, Guided exploration with review). New York: Springer-Verlag.

Hornsby, J., Lial M.L. & Rockswold G.K. (2011). *A Grafical Approach to Precalculus with limits: A Unit Circle Approach.*.(5th ed.).USA: Addison-Wesley.

Juter, K. (2007a). Students'Concept Development of Limits. *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)*. Working group 14, 2320-2329

Juter, K. (2007b). Students'Conceptions of Limits: High Achievers versus Low Achievers. T*he Montana Mathematics Enthusiast (TMME)*. *4*(1), 53-65.

Lauten,A.D., Graham,K. & Ferrini-Mundy,J. (1994). Student understanding of basic calculus concepts: Interaction with the graphics calculator. *The Journal of Mathematical Behavior 13*(2), 225-237.

Moliner, M. (1998). *Diccionario del uso del español*. (2ª Ed, Vol. 2). Madrid: Editorial Gredos.

Monaghan, J. (1991). Problems with the Language of Limits. *For the Learning of Mathematics*, *11*(3), 20-24.

Oxford(2011).*Oxford Dictionaries*.Oxford: Oxford University Press. Disponible en http://oxforddictionaries.com/.Consultado[24-06-2011].

Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1990). *Vocabulario científico y técnico*. Madrid: Espasa-Calpe.

Real Academia Española(2001). *Diccionario de la Lengua Española*. (22ª Ed). Madrid. Disponible en:http://www.rae.es/rae.html.Consultado[24-06-2011]

Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.), *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 219-231). Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Rico, L. (2001). Análisis Conceptual e Investigación en Didáctica de la Matemática.En Gómez,P. y Rico, L.(Eds.).*Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro.*(pp. 179-193). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Rico, L. (2007). *Sistema de Significados de un Concepto en las Matemáticas Escolares*. Documento no publicado. Granada: Universidad de Granada

Rico, L., Castro, E., Romero, I. (1996). The role of representation systems in the learning of numerical structures. En Gutiérrez, A., Puig, L. (Eds.), *Proceedings of the twentieth international conference for the psychology of mathematics education, Vol1* (pp. 87-102). Valencia: Universidad de Valencia.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J.L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma*, 58, pp. 7-23 .

Romero, I. (1995). *La introducción del número real en educación secundaria.* Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Selden A. & Selden J. (2005). Perspectives on Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 1-13.

Sfard A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies of Mathematics*, 22,1-36.

Sierra M., González M.T. y López C. (2002). Una visión integradora acerca del concepto de límite. *UNO. Revista de Didáctica de las matemáticas*. Núm.29, pp. 77- 94

Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike. *The Journal of Mathematical Behavior*, *7*(4), 765-790.

Tall D.O (1980).Mathematical intuition, with special reference to limiting processes, *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Berkeley, 170-176.

Tall D.O. & Schwarzenberger R.L.E.(1978). Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. *Mathematics Teaching*, 82, 44- 49.

Tall, D.O & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151- 169.

Tall, D.O. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. in Grouws D.A. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, New York, 495- 511.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.*14*(3), 293-305.

Vinner, S & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education*.*20*(4), 356-366.

Zaskis, R. & Applebaum M. (2007). Advancing mathematical thinking: Looking back at one problem. *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)*. Working group 14, 2389-2397

ANEXOS

ÍNDICE DE ANEXOS

ANEXO I: Cuestionarios A y B implementados

En este anexo se incluyen los cuestionarios A y B, pero sólo se muestran las actividades seleccionadas para el análisis de datos.

Cuestionario A

El grupo de Pensamiento Numérico del Departamento de Didáctica de la Matemática ha elaborado este cuestionario con el propósito de recoger información sobre los conceptos de límite y continuidad de una función.

No es un examen. Es una exploración inicial para que revises algunos conocimientos sobre el tema de “Límite y continuidad de una función” en este curso.

Contéstalo de forma individual, con creatividad e interés.

- ✓ Responde a cada actividad en los lugares facilitados para ello. Si te falta espacio escribe detrás de las hojas o solicita folios.
- ✓ Si te equivocas no borres, sino tacha la respuesta con una raya o ponla entre paréntesis. Esto es necesario para analizar tus respuestas.

Muchas gracias de antemano.

Edad: ☐☐

Nombre: ______________________________

Curso y grupo: ______________________________

Centro: ______________________________

ACTIVIDAD Nº 1

1. Rodea la V o la F en cada uno de los siguientes enunciados, según sea verdadero o falso. Justifica en el recuadro tu elección.

   a) Un límite describe cómo se mueve una función f(x) cuando x se mueve hacia cierto punto. V F

   Justificación:

   b) Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar. V F

   Justificación:

   c) Un límite se determina probando con valores de x cada vez más cerca de un número dado hasta que el límite se alcanza. V F

   Justificación:

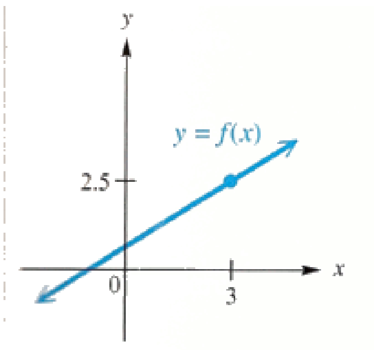
2. Escribe una definición personal, con tus propias palabras, para límite de una función en un punto.

   Definición:

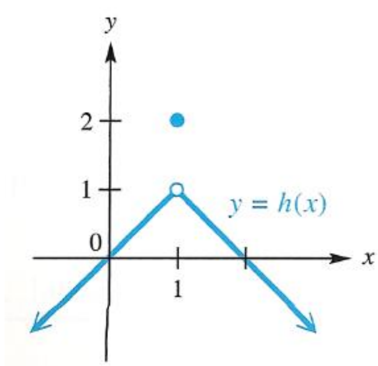
ACTIVIDAD Nº 2

Aplica tu definición personal a las funciones definidas por las siguientes gráficas y explica en cada caso si existe el límite en el punto indicado:

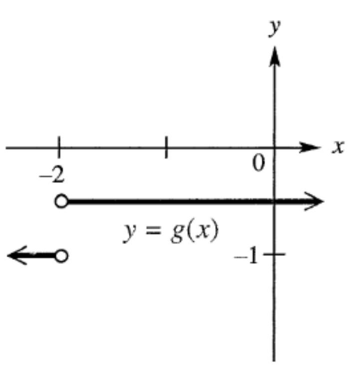
c) $lim_{x\to 3} f(x)$ *Explicación:*



b) $lim_{x\to 1} h(x)$ *Explicación:*



a) $\lim_{x\to -2} g(x)$ *Explicación:*



Cuestionario B

El grupo de Pensamiento Numérico del Departamento de Didáctica de la Matemática ha elaborado este cuestionario con el propósito de recoger información sobre los conceptos de límite y continuidad de una función.

No es un examen. Es una exploración inicial para que revises algunos conocimientos sobre el tema de “Límite y continuidad de una función” en este curso.

Contéstalo de forma individual, con creatividad e interés.

- ✓ Responde a cada actividad en los lugares facilitados para ello. Si te falta espacio escribe detrás de las hojas o solicita folios.
- ✓ Si te equivocas no borres, sino tacha la respuesta con una raya o ponla entre paréntesis. Esto es necesario para analizar tus respuestas.

Muchas gracias de antemano.

Edad: ☐☐

Nombre: ______________________________

Curso y grupo: ______________________________

Centro: ______________________________

ACTIVIDAD Nº 1

3. Rodea la V o la F en cada uno de los siguientes enunciados, según sea verdadero o falso. Justifica en el recuadro tu elección.

d) Un límite es un número o punto al que la función se acerca pero nunca alcanza. V F

Justificación:

e) Un límite es una aproximación que puedes hacer tan precisa como se quiera. V F

Justificación:

f) Un límite es un número al cual los valores de una función $f(x)$ pueden acercarse de manera arbitraria mediante restricciones de los valores de x. V F

Justificación:

4. Escribe una definición personal, con tus propias palabras, para límite de una función en un punto.

Definición :

ACTIVIDAD Nº 2

Después de trabajar con funciones, un grupo de alumnos ha encontrado las siguientes siete características, que cumplen algunas de ellas:

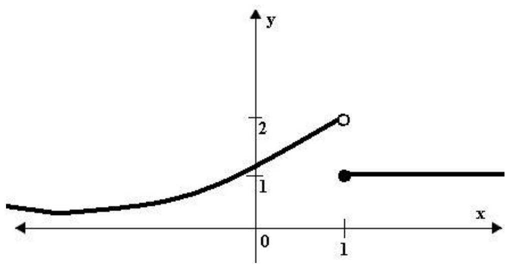
a) $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x)$ b) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$ c) $\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$

d) $f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$ f) $f(1) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$ g) $f(1) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$

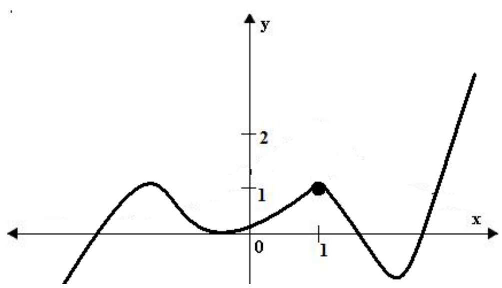
h) $f(1) \neq \lim_{x \to 1} f(x)$

Identifica dos propiedades que cumpla cada función:

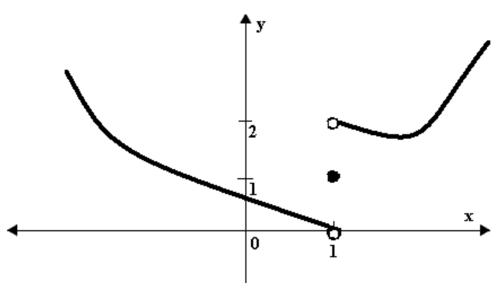
Función 1 *Propiedades que cumple:*



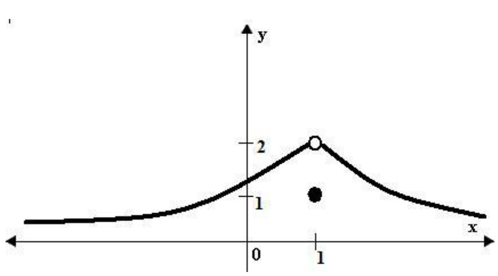
Función 2 *Propiedades que cumple:*



Función 3 *Propiedades que cumple:*



Función 4 *Propiedades que cumple:*



ANEXO II: Transcripción de las respuestas abiertas de las actividades A1.1, B1.1, C1.2 y A2.

En este anexo se incluyen las tablas en las que hemos vaciado todas las respuestas abiertas asociadas a las actividades A1.1, B1.1, C1.2 y A2.

La actividad A1.1 corresponde a la primera cuestión de la primera actividad (A1) del Cuestionario A y las tareas correspondiente a sus tres apartados se identifican con los códigos A1.1.a, A1.1.b y A1.1c. Igualmente la actividad B1.1, tiene tres apartados que se identifican con los códigos B1.1a, B1.1b, B1.1c. La segunda cuestión (A1.2, B1.2) de la primera actividad de los cuestionarios A y B (A1 y B1), que es común a ambos, se codifica por C1.2. Finalmente, la actividad A2 tiene tres tareas que se codifican por A2.a, A2.b y A2.c, respectivamente.

Los enunciados de las cuestiones están en el Apartado 4.3 y también en el Anexo I.
Sólo hemos anotado los registros verbales, no los dibujos que podían acompañar a los mismos, no obstante, se denota la presencia de dibujos dentro de las transcripciones correspondientes mediante la expresión “[dibujo]”. Las faltas de ortografía se indican entre corchetes, además de la traducción al lenguaje verbal de las expresiones simbólicas que los sujetos hayan utilizado.

II.1. Actividad A1.1

Ítem A1.1.a

A1.1a (1)	*Falso: "El límite no te dice el movimiento de f(x), el movimiento te lo dice la ecuación de f(x) que se te [de] para resolver, según tenga x, [x^2], [sqrt(x)], etc."*
A1.1a (2)	*Verdadero: " porque el [limite] cuando x tiende a algún número, significa donde se dirige la función cuando tiende a ese número"*
A1.1a (3)	*Verdadero: " Cuando se define un límite se define límite de una función cuando x tiende a un número"*
A1.1a (4)	*Verdadero: " Porque el límite describe hacia qué punto se acerca la función"*
A1.1a (5)	*Verdadero: "Sí, ya que el límite nos da todos los puntos posibles que puede adquirir la función"*
A1.1a (6)	*Falso: "Es falso porque los límites describen el número al que tiende f(x) cuando x tiende a un punto de la función"*
A1.1a (7)	*Verdadero: "La anterior definición nos viene a decir que un límite nos dice a qué número tiende una función, es decir, cuando x se mueve hasta cierto punto considerado como el límite"*
A1.1a (8)	*Falso: [Sin justificación]*
A1.1a (9)	*Falso: "Describe a lo que tiende dicha función"*
A1.1a (10)	*Falso: "Un límite es hacia donde tiende la función f(x)"*
A1.1a (11)	*Verdadero: " Porque a cada punto x le corresponde un punto [y], por lo que conforme se mueve x también se moverá [y] "*
A1.1a (12)	*Falso: " Es falso ya que un límite tendería a un punto (siendo f(x) la que tiende)"*
A1.1a (13)	*Verdadero: " Todos los límites se pueden representar"*
A1.1a (14)	*Falso: " Un límite no tiene que describir el movimiento de la función"*
A1.1a (15)	*Falso: "Describe a qué valores tiende [y] cuando x se mueve."*
A1.1a (16)	*Falso: " Un límite es un número aproximado al que se acerca una función sin resultado exacto."*

A1.1a (17)	*Verdadero: " Ej: f(x) en la actividad nº3 se va a aproximando al 3"*
A1.1a (18)	*Verdadero: " Es verdadero porque cuando x tiende a un número el límite nos indica el nº al que se aproxima la función f(x)"*

Ítem A1.1.b

A1.1.b (1)	*Verdadero: " Es verdadero ya que los límites nos indican al número al que no se llega en ningún caso de límites y cálculos con ellos"*
A1.1.b (2)	*Verdadero: " Porque el límite es un número al cual la función se aproxima sin llegar al punto o al número"*
A1.1.b(3)	*Verdadero: " Porque si no , no sería su límite"*
A1.1.b (4)	*Verdadero: "Porque el límite no llega nunca al punto"*
A1.1.b (5)	*Falso: " Una función si puede sobrepasar un límite, ya que muchas veces para averiguar el límite se dan valores que dan lugar a números más altos"*
A1.1.b (6)	*Falso: " Un límite es un número o punto al cual se aproxima una función pero nunca llega a tocarlo ni a rebasarlo"*
A1.1.b (7)	*Falso: " Ya que poniendo el ejemplo de una función a la cual se le aplican valores a la x, podemos obtener por ejemplo 1'0002 y 0'991; el límite es 1, pero podemos ver como ha sido rebasado"*
A1.1.b(8)	*Falso: [Sin justificación]*
A1.1.b(9)	*Verdadero: [Sin justificación]*
A1.1.b (10)	*Verdadero: " Si lo pudiera rebasar no sería un límite"*
A1.1.b(11)	*Falso: "Un límite es un número o punto al cual una función tiende. Sin embargo, un límite también puede tender hacia +-∞"*
A1.1.b (12)	*Verdadero: " Ya que el límite nos indica hasta [que] punto llega o pasa"*
A1.1.b (13)	*Falso: "Puede ser menor, igual o mayor. El límite simplemente es un punto de referencia."*
A1.1.b(14)	*Verdadero: " Ya que con el límite no se puede realizar la operación de la función"*
A1.1.b (15)	*Falso: [Incorpora dibujo de una función con límite en x=2 igual a 0] " Pero existen números por encima y por debajo de cero"*

A1.1.b (16)	*Verdadero: "Si el límite de una función es 4 un resultado de esa función no puede ser 5"*
A1.1.b (17)	*Falso: " Ej: Límite cuando x->3 de f(x) (Actividad nº2)"*
A1.1.b (18)	*Verdadero: " Verdadero porque un límite es un punto al que una función se aproxima infinitamente sin llegar a él "*

Ítem A1.1.c

A1.1.c (1)	*Verdadero: "Cuanto más te acercas por la derecha e izquierda, más se acercan ambos al límite y, por tanto, se puede delimitar y saber el límite en cualquier cálculo."*
A1.1.c (2)	*Verdadero: " para hallar el límite se dan valores a la x próximos al número que tiende la función, por la izquierda y por la derecha"*
A1.1.c(3)	*Verdadero: " Se hace haciendo tablas de valores"*
A1.1.c (4)	*Verdadero: [Sin justificación]*
A1.1.c (5)	*Verdadero: " Los valores de x obtenidos nos van diciendo si se acerca o aleja al número dado"*
A1.1.c (6)	*Verdadero: " Es verdadero porque probando con valores de x que cada vez se aproximan más a un número dado podemos ver a qué número se aproxima cada vez más f(x)"*
A1.1.c (7)	*Falso: " Se determina dándole valores a la x, pero no tiene por qué ser un valor o valores cada vez más cercanos a un número dado"*
A1.1.c(8)	*Verdadero: [Sin justificación]*
A1.1.c(9)	*Falso: " El límite no se puede alcanzar, pero sí aproximar y a partir de esas aproximaciones sacar el límite"*
A1.1.c (10)	*Falso: " El límite nunca se alcanza pero sí que se aproxima la cifra cada vez más a él."*
A1.1.c(11)	*Falso: " No es necesario alcanzar exactamente el límite sino aproximarse lo suficiente para saber [cual] es el [limite]"*
A1.1.c (12)	*Verdadero: "[…] Que se van sustituyendo hasta que un número se aproxima a ese límite deseado de conocer"*
A1.1.c (13)	*Falso: "Se hace con una [formula]."*
A1.1.c(14)	*Falso: " Se puede conocer el límite de otras formas"*

A1.1.c (15)	*Verdadero: " Se sustituye la x por números próximos a un nº o el nº mismo."*
A1.1.c (16)	*Verdadero: "Por eso al plantear una función debajo de Lim se pone x-> al nº que sea."*
A1.1.c (17)	*Falso: " Puede que el límite sea ∞ y nunca lleguemos"*
A1.1.c (18)	*Falso: " Falso porque un límite se determina probando con valores de x que se aproximen por la izquierda y por la derecha al nº x y si los dos dan el mismo resultado obtenemos el límite de esa función."*

II.2. Actividad B1.1

Ítem B1.1.a

B1.1.a (1)	*Falso: " No tiene [porque] ser un nº porque un límite puede tender a ∞"*
B1.1.a (2)	*Verdadero: [No justificación]*
B1.1.a (3)	*Verdadero: [No justificación]*
B1.1.a (4)	*Falso: " Un [limite] es un número o punto al que la función alcanza"*
B1.1.a (5)	*Verdadero: " porque la función [continua] hasta el infinito, pero [aun] [asi] [solo] se acerca y nunca lo alcanza"*
B1.1.a (6)	*Verdadero: "Eso es cierto porque por mucho que se acerque nunca alcanza el número ejemplo. 0'99999 nunca llega a 1"*
B1.1.a (7)	*Verdadero: " El límite de una función es el número o punto al que se acerca sin llegar a alcanzarlo"*
B1.1.a (8)	*Falso: " La función alcanza al límite, pero no puede sobrepasarlo"*
B1.1.a (9)	*Verdadero: "Porque un límite tiende a un número nunca es exacto. Por ejemplo cuando un límite es infinito (∞)"*
B1.1.a (10)	*Verdadero: "Aunque más que un punto, el límite es una recta o conjunto infinito de puntos representados de forma numérica al que la función se acerca pero nunca alcanza. [límite de x cuando x tiende a 2 es 2], pero ello no significa que la función sea x=2, sino que cuando x tiende a 2 (1'99, 2,01, 2'0001) el límite será 2"*

B1.1.a (11)	*Verdadero:"Una función tiene límite en un punto en el lugar hacia el que al sustituir en f(x) se van aproximando pero nunca son exactos"*
B1.1.a (12)	*Falso:"Un límite puede ser un número concreto, que [si] lo alcanza la función"*
B1.1.a (13)	*Falso: " El límite es el número que la función alcanza pero no lo [sobre pasa]"*
B1.1.a (14)	*Verdadero: " Es verdadero porque si alcanzara el número la función tendría fin"*
B1.1.a (15)	*Verdadero: " Ya que [solo] es la aproximación de ese número, nunca es exacto"*
B1.1.a (16)	*Verdadero: " [Por que] si lo alcanzara no sería un [limite]"*
B1.1.a (17)	*Verdadero: " El [limite] de una función es un punto al cual la [linea] determinada de una función se aproxima a un número pero nunca llega a [este]"*
B1.1.a (18)	*Verdadero: " Se acerca pero nunca llega"*

Ítem B1.1.b

B1.1.b (1)	*Verdadero: "Verdadero. Porque puedes dar valores en una tabla y establecer con más precisión los valores que toma x para f(x). Ampliando para reducir los errores a la milésima, centésima, etc."*
B1.1.b (2)	*Verdadero: [No justificación]*
B1.1.b (3)	*Falso: " Falso no es tan precisa como se quiere sino como sea"*
B1.1.b (4)	*Verdadero: [No justificación]*
B1.1.b (5)	*Falso: " porque lo que importa no es la precisión, sino encontrar los números que [mas] se acerquen al límite."*
B1.1.b (6)	*Falso: "No se puede hacer tan precisa como uno quiera pero sí dentro de unos parámetros"*
B1.1.b (7)	*Falso: "Un límite es una [aproximacion] que puedes hacer hasta cierto punto de [precision]"*
B1.1.b (8)	*Falso: "Un límite, es un tope numérico y no es aproximativo, sino concreto."*
B1.1.b (9)	*Falso: " Cuando es una aproximación de un número [si], pero si por ejemplo es infinito no te puedes acercar porque no tiene fin"*

B1.1.b (10)	*Verdadero: "Cuantas más cifras decimales se le den a los valores para comprobarlo y más próximas sean al número al que tienda x (x->n), la aproximación será más precisa (menor error absoluto), y viceversa cuando los números dados tienen una mayor diferencia con el número al que tiende x."*
B1.1.b (11)	*Verdadero: " Es verdadero ya que [tu] puedes ir [dandole] todos los valores que quieras para comprobarlo"*
B1.1.b (12)	*Verdadero: "Los límites pueden ser ∞ aproximándose a un valor que cada vez será más preciso. O también puede ser un número exacto, que cuanto más nos [aproximámos] más concreto será este"*
B1.1.b (13)	*Falso:" Es una aproximación que depende de la función y de los valores de x"*
B1.1.b (14)	*Verdadero: " Es verdadero ya que hay límites que se acercan más a un número que a otros."*
B1.1.b (15)	*Falso: " No es precisa sino que es aproximado porque tiende a ∞"*
B1.1.b (16)	*Falso: " Es tan precisa como los valores de restricción lo permitan"*
B1.1.b (17)	*Verdadero: " La [linea] determinada por la función puede acercarse infinitamente pero nunca [llegara] Ej: 0'5; 0'05; 0'005; 0'0005"*
B1.1.b (18)	*Falso: " Un [limites] es un [numero] al que se le aproximan valores"*

Ítem B1.1.c

B1.1.c (1)	*Verdadero: "Verdadero. Porque puede que en una función f(x) no [aparecen] valores de x y por tanto no [tenen] imagen en dicho punto."*
B1.1.c (2)	*Falso: [No justificación]*
B1.1.c (3)	*Verdadero:[No justificación]*
B1.1.c (4)	*Verdadero: [No justificación]*
B1.1.c (5)	*Verdadero: " Porque para cada valor de x, la función f(x) se acerca más al límite."*
B1.1.c (6)	*Verdadero: " [Si], porque depende de las restricciones de los valores de x."*

B1.1.c (7)	*Falso: "Un límite es un número al cual los valores de una función f(x) pueden acercarse de manera creciente y arbitraria mediante restricciones de los valores de x."*
B1.1.c (8)	*Verdadero: [No justificación]*
B1.1.c (9)	*Verdadero: [No justificación]*
B1.1.c (10)	*Falso: " Los valores de x no se acercan al límite, sino el resultado de la expresión que resulta de función f(x) de sustituir por los valores a los que tiende x*
B1.1.c (11)	*Verdadero: [No justificación]*
B1.1.c (12)	*Falso: " Los valores no se acercan de manera arbitraria, según valores de x nos acercamos a ese límite o nos alejamos"*
B1.1.c (13)	*Verdaderos:[No justificación]*
B1.1.c (14)	*[No respuesta]*
B1.1.c (15)	*Falso: " Se acercan de manera aproximada pero no arbitraria"*
B1.1.c (16)	*Verdadero: [No justificación]*
B1.1.c (17)	*Falso: " Los valores de x se acercarán [a el] límite [segun] el valor que adquieran al sustituirse por x*
B1.1.c (18)	*Verdadero: " Se acerca mediante valores con progresividad ascendente o descendente"*

II.3. Actividad C1.2

Dado que esta actividad es común a los dos cuestionarios, se indica con A y B si el sujeto realizó el cuestionario A o el cuestionario B. Así los códigos varían desde C1.2 (1)-A hasta C1.2 (18)-A, y desde C1.2 (1)-B hasta C1.2 (18)-B.

C1.2 (1)-A	*"Límite es el lugar del plano en el cual la función f(x) no llega a tocar o pasar. Límite se averigua dándole valores a x."*
C1.2 (2)-A	*" el límite de una función en un punto, es un número al cual la función se acerca pero nunca llega a tocar ese número"*
C1.2 (3)-A	*" Cuando una función tiende a un número da su límite"*

C1.2 (4)-A	*" el límite de una función en un punto es el número que limita la función al tender la x de un número"*
C1.2 (5)-A	*"El límite de una función en un punto son todos aquellos valores que puede adquirir la incógnita x hasta llegar al punto dado."*
C1.2 (6)-A	*"El límite de una función en un punto es el número al que se aproxima f(x) cuando x se acerca a ese punto."*
C1.2 (7)-A	*" El límite de una función en un punto es el número al que tiende dicha función, ya que dándole valores a la x se obtienen resultados que tienden a un mismo número."*
C1.2 (8)-A	*" [Limite]: Cuando una función tiende a un número, acercándose a él"*
C1.2 (9)-A	*"Límite de una función es aquel punto donde la función no puede llegar nunca a sobrepasar o tocar, se puede [aproximarse] pero nunca tocar o pasar. El límite describe a lo que tiende dicha función."*
C1.2 (10)-A	*"El límite de una función es el número (punto) hacia el que tiende una función."*
C1.2 (11)-A	*" El límite de una función en un punto (x) es el punto (y) al que tiende la función en dicho punto (x)."*
C1.2 (12)-A	*" Límite de la función en un punto, es aquel punto al que tiende la función siendo sustituida en la función la x por un número dado (x->a)"*
C1.2 (13)-A	*[No respuesta]*
C1.2 (14)-A	*"El [limite] de una función es aquel que no permite que la función se represente gráficamente."*
C1.2 (15)-A	*" El límite de una función en un punto es el número al que tiende " y" (la imagen) cuando ' x ' se desplaza. No hace falta que el límite tenga imagen. El [límite cuando x tiende a **a** por la derecha] y [límite cuando x tiende a **a** por la izquierda] tiene que ser el mismo.*
C1.2 (16)-A	*" El límite de una función en un punto es el nº máximo que puede dar como resultado"*
C1.2 (17)-A	*" Es el número al que se va aproximando x"*
C1.2 (18)-A	*" El límite de una función en un punto **a** es el número al que la función se aproxima en ese punto."*
C1.2 (1)-B	*" sería el valor que toma una función, al acercarse a un valor, pero nunca lo alcanza"*
C1.2 (2)-B	*"Un límite es un número que no alcanza nunca el número entero escogido. Por ejemplo: [Límite cuando x tiende a 2 de f(x)= (2x+3)/(x-1)]. En estos caos se haría una tabla de valores para ver qué número son los que se acercan por la izquierda y por la derecha."*

C1.2 (3)-B	*“Un límite es un número que se aproxima a [a] una unidad. Tal cantidad es el valor al que tiende x”*
C1.2 (4)-B	*“Un [limite] es un número o punto al que la función alcanza, se puede hacer tan precisa como se quiera. Es un número al cual los valores de f(x) pueden acercarse de manera arbitraria mediante los valores de x es decir [dandole] valores a la x.”*
C1.2 (5)-B	*“Un límite de una función f(x) en un punto es un número situado en una gráfica al cual se pretende acerca mediante valores de x.”*
C1.2 (6)-B	*[Dibujo] “Un límite es un número o punto al que la función se acerca pero nunca lo alcanza.”*
C1.2 (7)-B	*“El límite de una función en un punto es el número o punto al que la función se aproxima en dicho punto, es decir, es el valor de y para un determinado x.”*
C1.2 (8)-B	*“Un límite de una función es el número límite al cual puede llegar la función.”*
C1.2 (9)-B	*“Límite de una función en un punto es una aproximación a ese punto.”*
C1.2 (10)-B	*“ ~~El límite de una función en un punto [límite de f(x) cuando x tiende a n, +∞, -∞], es el número que toma la función f(x), cuando tomamos los valores a los que tiende x”~~* *“ Es el conjunto de puntos del plano a los que se aproxima una función cuando x tiende a un número, a +∞, o a - ∞. A veces hay indeterm. [Indeterminaciones].*
C1.2 (11)-B	*“ Un límite de una función en un punto es el valor al que se aproximan los valores dados a la f(x)”*
C1.2 (12)-B	*“ La función, un máximo en ese valor que viene precedido por sus correspondientes valores de x; cuanto más nos aproximamos a la imagen de y más nos aproximaremos al límite, y por tanto, a y”*
C1.2 (13)-B	*“Un límite es un valor al que la función tiende a acercarse, puede llegar a él pero no puede superarlo”*
C1.2 (14)-B	*“ El límite de una función en un punto son todos aquellos números que se acercan a dicho punto pero sin llegar a alcanzarlo”*
C1.2 (15)-B	*“ El [limite] de una función en un punto es el [numero] [mas] [proximo], dentro del [limite], al que se acerca la función”*
C1.2 (16)-B	*“ Es un número o punto al cual se acerca una función lo más próximo posible”*
C1.2 (17)-B	*“ Límite de una función es un punto al cual una función tras ser representada nunca llega [a el] punto pero [si] se aproxima infinitamente.”*
C1.2 (18)-B	*“ Un [limite] de una función en un punto es el valor del punto al que se le aproximan los [demas] valores sin llegar a él.”*

II.4. Actividad A2

Ítem A2.a

A2.a (1)	*" No existe límite ya que la función sigue hacia el infinito tras pasar por x=3"*
A2.a (2)	*"La función definida por esta gráfica es una recta [inclinado] que se alarga infinitamente. [límite de f(x) cuando x tiende a 3] no existe, porque la función se extiende infinitamente"*
A2.a(3)	*" Cuando el límite f(x) tiende la x->3 por la izquierda es -∞ y por la derecha +∞*
A2.a (4)	*" Si existe[límite de f(x) cuando x tiende a 3] ya que el nº de la y que corresponde al 3 se encuentra en la función"*
A2.a (5)	*" (No existe límite, ya que f(x) tiende a infinito)" " Tiende a +∞"*
A2.a(6)	*" El límite cuando x tiende a 3 es 2,5"*
A2.a(7)	*" El límite es 3, Ya que podemos ver que es un punto cerrado entre ambas funciones, lo que nos indica que se incluye en el límite y que es 3"*
A2.a (8)	*" Sí, existe límite"*
A2.a(9)	*" El límite no es el punto indicado"*
A2.a (10)	*[No respuesta]*
A2.a(11)	*" [Si] existe el límite en el punto indicado y es 2,5 porque coincide con la definición que doy de límite"*
A2.a (12)	*"Es una función en la que x->3 en la que su límite es 2.5, si existe el límite. La imagen de f(x) es 2.5 y la antiimagen 3"*
A2.a(13)	*"Existe límite para el número indicado. El [limite] parte de -∞ y va creciendo hasta x=3 y a partir de [hay] [continua] su crecimiento hasta +∞"*
A2.a(14)	*" No existe el límite en el punto indicado"*
A2.a (15)	*" Existe porque cuando x se aproxima a 3 por la [izquierda] y [derecha], la imagen tiende a ser 2'5"*

A2.a (16)	*“ (si existe límite en el punto indicado porque la recta pasa por el punto)” “ No existe límite porque la línea [continua] a pesar de haber llegado al punto 3”*
A2.a (17)	*“ Su límite es 2’5”*
A2.a (18)	*“ [Si] existe [límite de f(x) cuando x tiende a 3] porque [límite de f(x) cuando x tiende a 3 por la izquierda] es 2’5 y [límite de f(x) cuando x tiende a 3 por la derecha] es 2’5 por tanto [límite de f(x) cuando x tiende a 3] es 2’5*

Ítem A2.b

A2.b (1)	*“ No es límite ya que aunque la función llega y pasa x=1 y no toca en ella en y=1, en y=2 un punto de la función aparece en x=1, por lo que no sería límite”*
A2.b (2)	*“La función definida por esta gráfica es una función definida a trozos. [Límite de h(x) cuando x->1 si existe porque la gráfica se acerca a 1 cuando das valores”*
A2.b(3)	*“Sí existe límite [límite de h(x) cuando x tiende a 1] es -∞. Cuando x->1 el límite de h(x) es un número indeterminado.”*
A2.b(4)	*“ No existe [límite de h(x) cuando x tiende a 1] , porque el nº al que tiende el 1 no está en la función, sino que es un punto aparte.”*
A2.b (5)	*“ (No existe límite, ya que una función no puede tener más de 1)” “ Tiende a -∞”*
A2.b(6)	*“ El límite cuando x tiende a 1 es 2”*
A2.b(7)	*“ No existe límite, pues la función se corta (por la derecha y por la izquierda) en un punto anterior al 2 y por tanto no existe, pues vemos representado un círculo cerrado en el (1,2) y no es posible por lo dicho anteriormente”*
A2.b(8)	*“Sí, existe límite. Función definida a trozos, y un punto salta”*
A2.b(9)	*“ El límite sería 1 en esta función, ya que nunca llegaría a tocar o pasar por ese punto la función, por lo que no es el punto indicado”*
A2.b (10)	*[No respuesta]*
A2.b(11)	*“ No existe límite en el punto 1, ya que no coincide con la definición que doy de límite”*
A2.b(12)	*“ La función tiende a 1 (x->1) […] No existe límite (2), ya que no hay un punto donde tienden las dos direcciones contrarias”*

A2.b(13)	*"Existe límite para el número indicado. El límite en x=1 tiene un valor especial y [para de] -∞ a ese punto tiene otro y a partir de x=1 tiene un valor opuesto que tiende a +∞"*
A2.b(14)	*" El punto indicado no es que no sea límite sino que se encuentra fuera de la función"*
A2.b(15)	*"Existe porque cuando x tiende a 1 la imagen se aproxima a 1. No hace falta que tenga imagen"*
A2.b(16)	*" (No existe límite en el punto indicado porque ninguna de las líneas pasa por el punto)" "[Si] existe límite porque al llegar al punto 1 cambia de dirección la [línea]"*
A2.b(17)	*"límite: 2"*
A2.b(18)	*" [Si] tiene límite porque [límite de f(x) cuando x tiende a 1 por la izquierda es 1] y [límite de f(x) cuando x tiende a 1 por la derecha es 1] y por tanto [límite de f(x) cuando x tiende a 1 es 1]*

Ítem A2.c

A2.c (1)	*" Es límite ya que la función f(x) está en x=-2 pero no en -2 concretamente sino en los números cercanos a x=-2 como: -2'001 o -1'999"*
A2.c (2)	*"Esta función es una función definida a trozos y no existe [limite].[límite de g(x) cuando x tiende a -2] no existe, porque cuando das valores, por la derecha la función tiene como límite 1 y cuando das valores por la izquierda tiene límite -1"*
A2.c(3)	*" Cuando tiende por la derecha es +∞ y por la izquierda -∞"*
A2.c(4)	*" No existe [límite de g(x) cuando x tiende a -2], porque el nº al que tiende el -2 no está definido en la función."*
A2.c (5)	*" El límite de g(x) es desde -2 hasta +∞ y desde -2 hasta -∞ en el punto -1 de y"*
A2.c(6)	*" No existe límite cuando x tiende a -2"*
A2.c(7)	*"El límite es 2, pero sin incluirlo; ya que lo vemos representado con un círculo abierto que nos indica que no se incluye."*
A2.c(8)	*"Sí, existe límite. Función definida a trozos."*
A2.c(9)	*" Sí es el punto x indicado -2. Ya que nunca [tocara] o [pasara] por ese punto"*

A2.c(10)	*[No respuesta]*
A2.c(11)	*“ No existe límite en el punto -2, ya que no coincide con la definición que doy de límite”*
A2.c(12)	*“Es una función con desarrollo lineal, discontinuo, es decir, es una función a trozos. [Límite de g(x) cuando x tiende a -2 es -1]. Sí existe el límite de esta función a trozos ya que hay un punto dónde concluyen las dos rectas”*
A2.c(13)	*“No existe límite para el número indicado (-2). El [limite] tiene un mismo valor de y para todas las x desde -∞ hasta -2, en -2 no existe un valor de y desde -2 hasta +∞ las x gozan de otro valor distinto de y pero también uno único”*
A2.c(14)	*“ Es una función definido a trozos y si existe límite en el punto indicado”*
A2.c(15)	*“No existe porque cuando x tiende a -2 por la [izquierda], el límite es -1 y por la derecha es 0’5.Por lo tanto no tiene límite”*
A2.c(16)	*“ [Si] existe límite porque al llegar al punto -2 se corta la recta”*
A2.c(17)	*“No tiene límite”*
A2.c(18)	*“ No tiene [límite de g(x) cuando x tiende a -2 porque para x=-2 no tiene imagen y por tanto no pertenece a g(x)”*

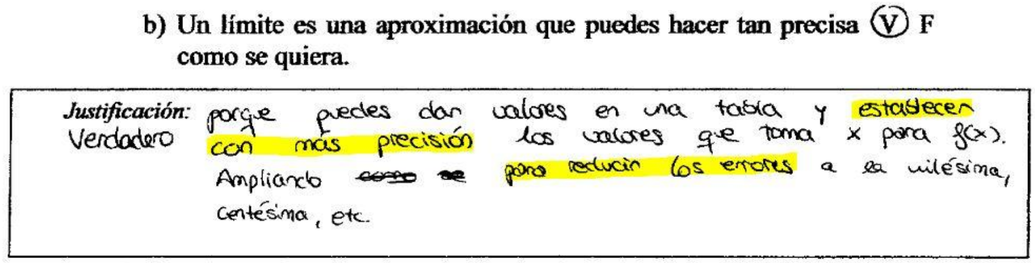
ANEXO III: Figuras incluidas en el apartado 4.5 de la memoria

En este anexo incluimos las figuras que ejemplifican respuestas representativas de cada uno de los grupos que hemos utilizado en el análisis del uso de los términos “aproximar” y “tender”. Estos grupos son: Grupo Aprox., Grupo Tender y Grupo Aprox/Tender.

III.1. Figuras que ejemplifican respuestas vinculadas al grupo Aprox.

Figura 3.1.

Respuesta al ítem B1.1.b con término clave “establecer con más precisión/reducir errores”

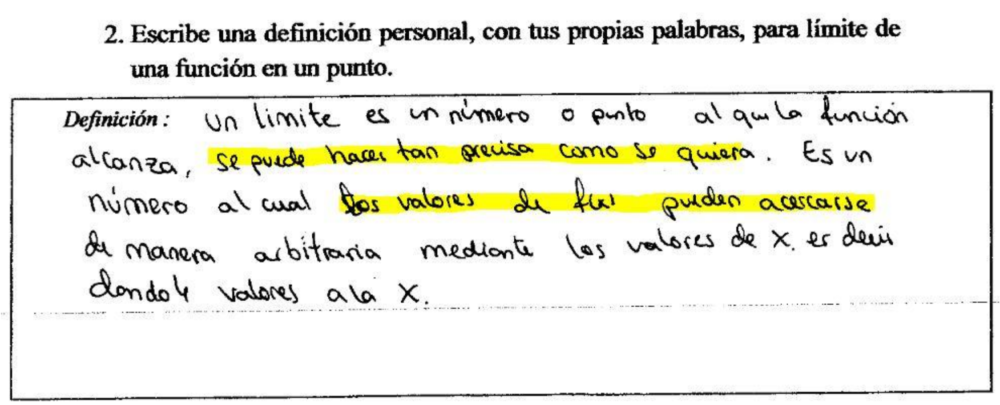


b) Un límite es una aproximación que puedes hacer tan precisa (V) F como se quiera.

Justificación: porque puedes dar valores en una tabla y establecer con más precisión los valores que toma x para f(x).
Verdadero
Ampliando ~~como se~~ para reducir los errores a la milésima, centésima, etc.

Figura 3.2.

Respuesta a la actividad C1.2 con término clave “hacerse tan precisa como se quiera”

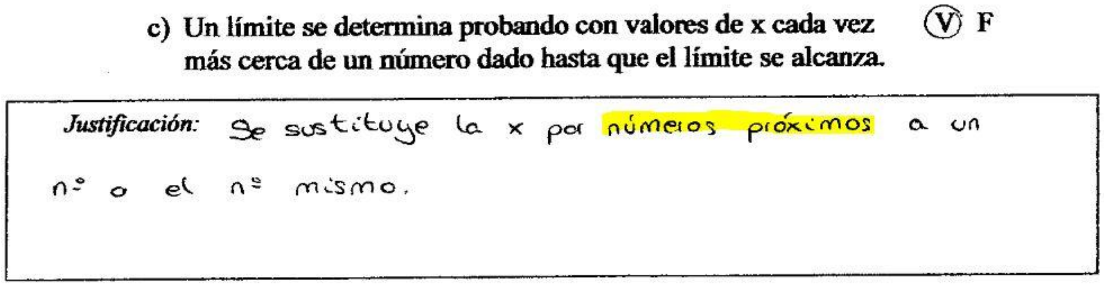


2. Escribe una definición personal, con tus propias palabras, para límite de una función en un punto.

Definición: Un límite es un número o punto al que la función alcanza, se puede hacer tan precisa como se quiera. Es un número al cual los valores de f(x) pueden acercarse de manera arbitraria mediante los valores de x. es decir dando valores a la x.

Figura 3.3.

Respuesta al ítem A1.1.c con término clave "números próximos"

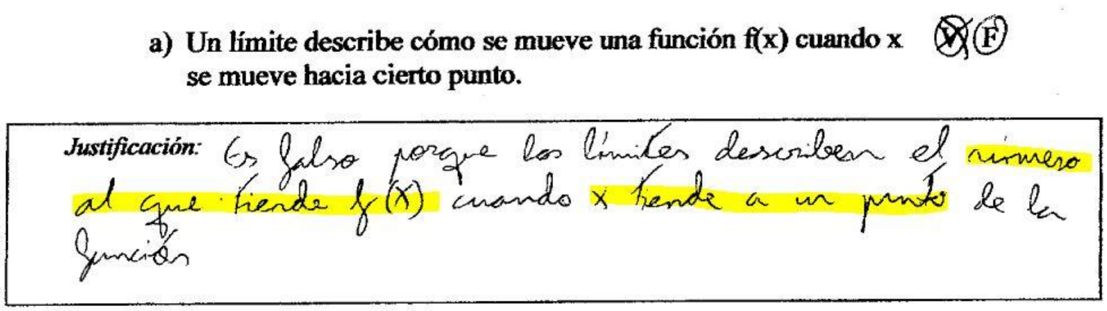

c) Un límite se determina probando con valores de x cada vez más cerca de un número dado hasta que el límite se alcanza. V F

Justificación: Se sustituye la x por números próximos a un nº o el nº mismo.

III.2. Figuras que ejemplifican respuestas vinculadas al grupo Tender.

Figura 3.4.

Respuesta al ítem A1.1.a con término clave "tender"

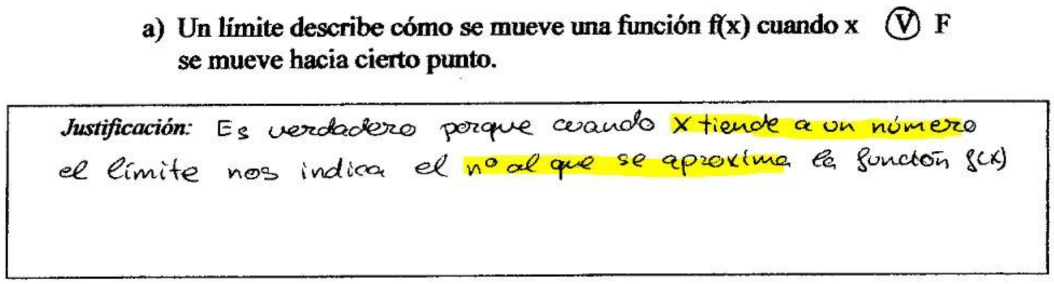

a) Un límite describe cómo se mueve una función f(x) cuando x se mueve hacia cierto punto. V F

Justificación: Es falso porque los límites describen el número al que tiende f(x) cuando x tiende a un punto de la función

III.3. Figuras que ejemplifican respuestas vinculadas al grupo Aprox/Tender.

Figura 3.5.

Respuesta al ítem A1.1.a con términos clave "aproximarse/tender"

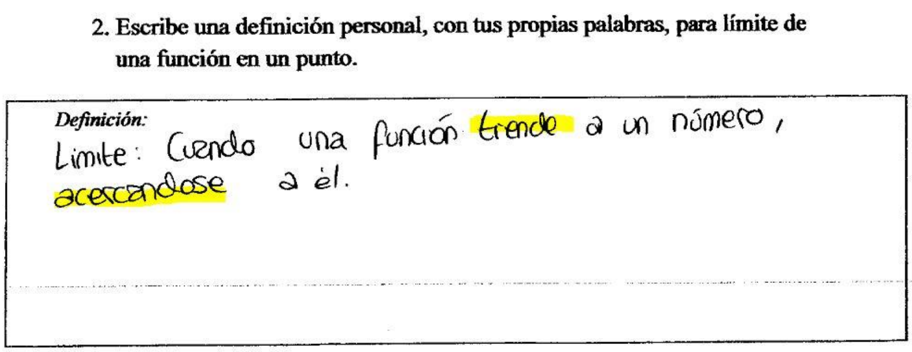


a) Un límite describe cómo se mueve una función f(x) cuando x se mueve hacia cierto punto. Ⓥ F

Justificación: Es verdadero porque cuando x tiende a un número el límite nos indica el nº al que se aproxima la función f(x)

Figura 3.6.

Respuesta a la actividad C1.2 con términos clave "tender/acercarse"

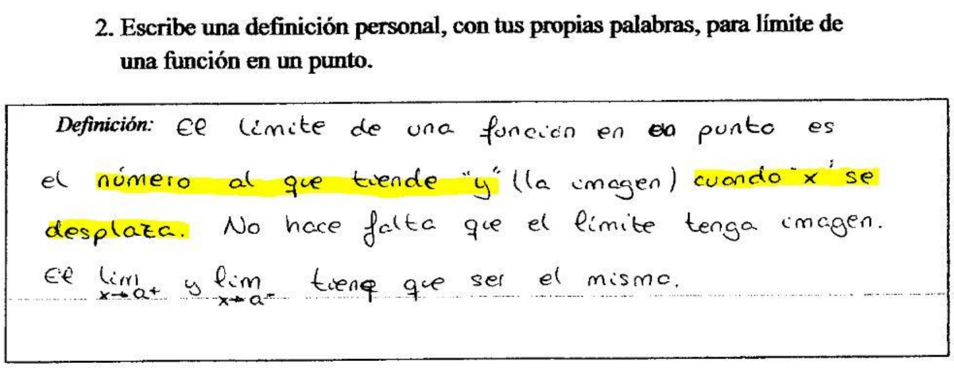


2. Escribe una definición personal, con tus propias palabras, para límite de una función en un punto.

Definición:
Limite: Cuando una función tiende a un número, acercandose a él.

Figura 3.7.

Respuesta a la actividad C1.2 con término clave "tender/desplazarse"



2. Escribe una definición personal, con tus propias palabras, para límite de una función en un punto.

Definición: El limite de una funcion en un punto es el número al que tiende "y" (la imagen) cuando "x" se desplaza. No hace falta que el limite tenga imagen. El $\lim_{x \to a^+}$ y $\lim_{x \to a^-}$ tiene que ser el mismo.

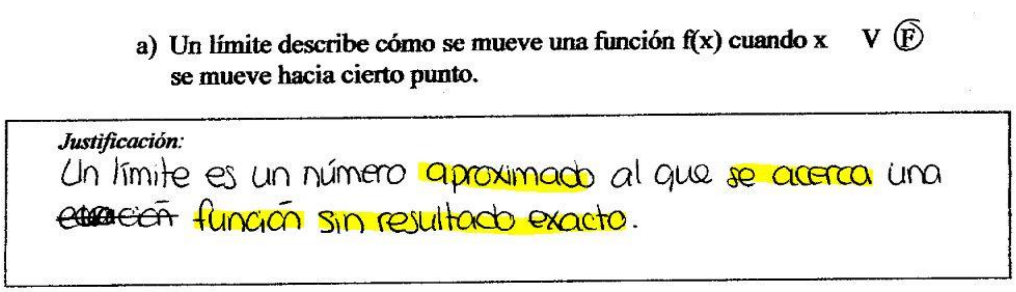
ANEXO IV: Figuras incluidas en el apartado 4.6 de la memoria

En este anexo incluimos las figuras que ejemplifican respuestas representativas de cada uno de los grupos que hemos utilizado en el análisis del uso de los términos clave ligados a la alcanzabilidad y rebasabilidad del límite. Estos grupos son: Grupo Alcanzabilidad., Grupo Rebasabilidad y Grupo Mixto. Además presentamos ciertas respuestas que hemos excluido del análisis pero merecen su mención por sus particularidades.

IV.1. Figuras que ejemplifican respuestas vinculadas al grupo Alcanzabilidad.

Figura 4.1.

Respuesta al ítem A1.1.a con término clave "ser inexacto"

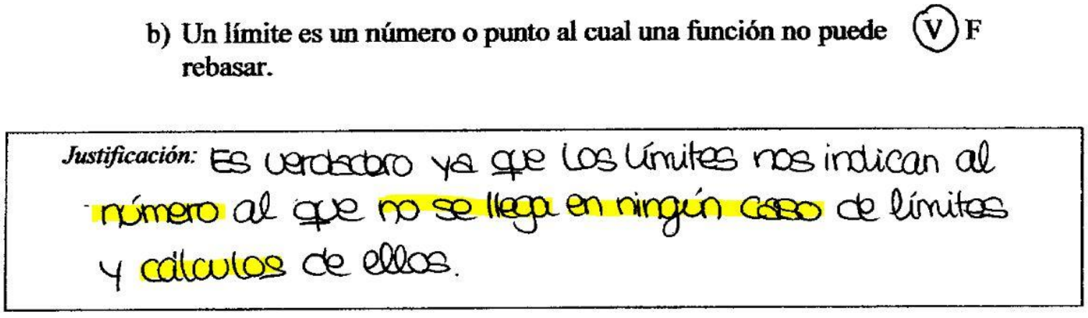


a) Un límite describe cómo se mueve una función f(x) cuando x se mueve hacia cierto punto. V F

Justificación:
Un límite es un número aproximado al que se acerca una ~~ecuación~~ función sin resultado exacto.

Figura 4.2.

Respuesta al ítem A1.1.b con término clave "llegar"

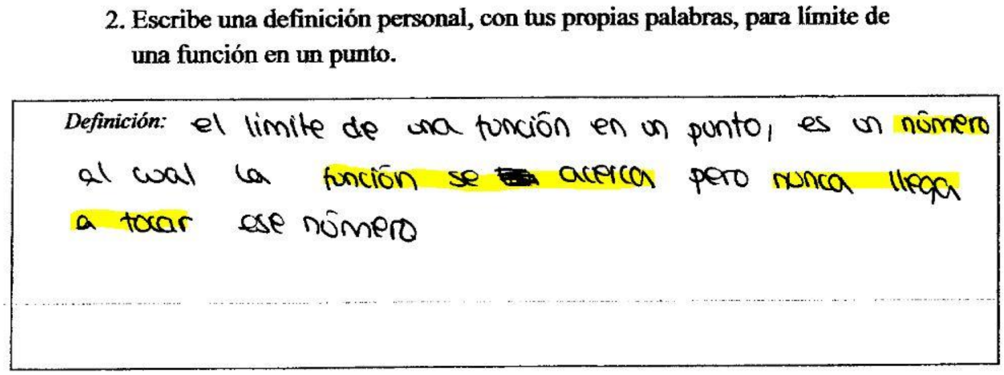


b) Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar. V F

Justificación: Es verdadero ya que los límites nos indican al número al que no se llega en ningún caso de límites y cálculos de ellos.

Figura 4.3.

Respuesta al ítem C1.2 con término clave "tocar"

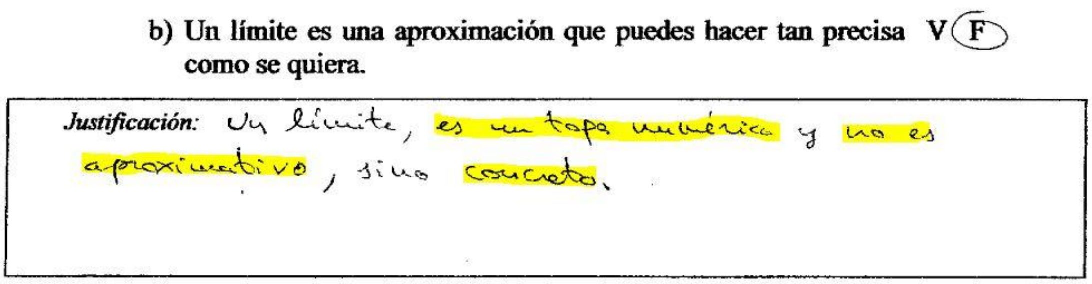

2. Escribe una definición personal, con tus propias palabras, para límite de una función en un punto.

Definición: el limite de una función en un punto, es un número al cual la función se acerca pero nunca llega a tocar ese número

IV.2. Figuras que ejemplifican respuestas vinculadas al grupo Rebasar.

Figura 4.4.

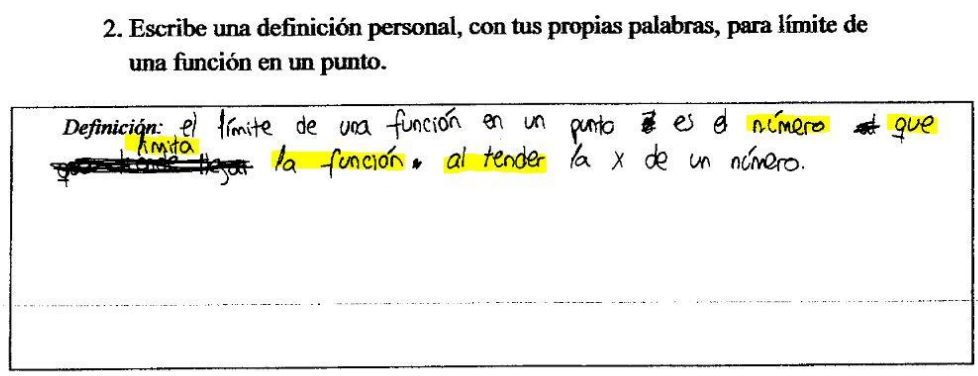
Respuesta al ítem B1.1.b con término clave "ser tope numérico"


b) Un límite es una aproximación que puedes hacer tan precisa como se quiera. V (F)

Justificación: Un límite, es un tope numérico y no es aproximativo, sino concreto.

Figura 4.5.

Respuesta al ítem C1.2 con término clave "limitar"


2. Escribe una definición personal, con tus propias palabras, para límite de una función en un punto.

Definición: el límite de una función en un punto es el número que limita la función al tender la x de un número.

Figura 4.6.

Respuesta al ítem C1.2 con término clave "ser número máximo"

2. Escribe una definición personal, con tus propias palabras, para límite de una función en un punto.

Definición: El límite de una función en un punto es el nº máximo que puede dar como resultado.

IV.3. Figuras que ejemplifican respuestas vinculadas al grupo Mixto.

Figura 4.7.

Respuesta al ítem A1.1.b con términos clave "no tocar/no rebasar"

b) Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar. **V F**

Justificación: Un límite es un número o punto al cual se aproxima una función pero nunca llega a tocarlo ni a rebasarlo

Figura 4.8.

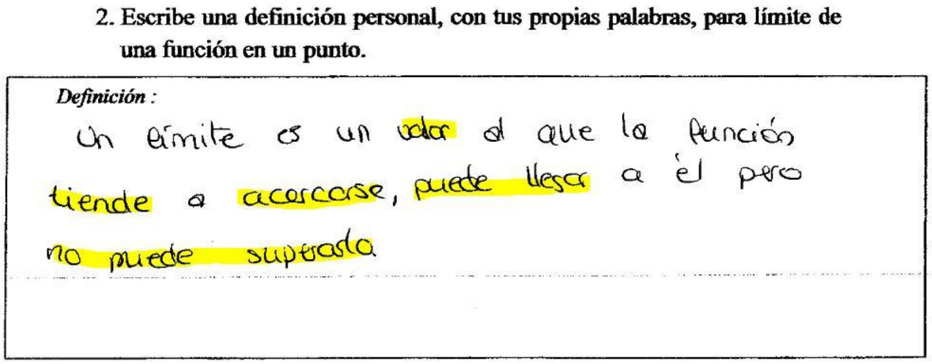
Respuesta al ítem C1.2 con términos clave "ser número límite/llegar"

2. Escribe una definición personal, con tus propias palabras, para límite de una función en un punto.

Definición: Un límite de una función es el número límite al cual puede llegar la función.

Figura 4.9.

Respuesta al ítem C1.2 con términos clave "llegar/no superar"



2. Escribe una definición personal, con tus propias palabras, para límite de una función en un punto.

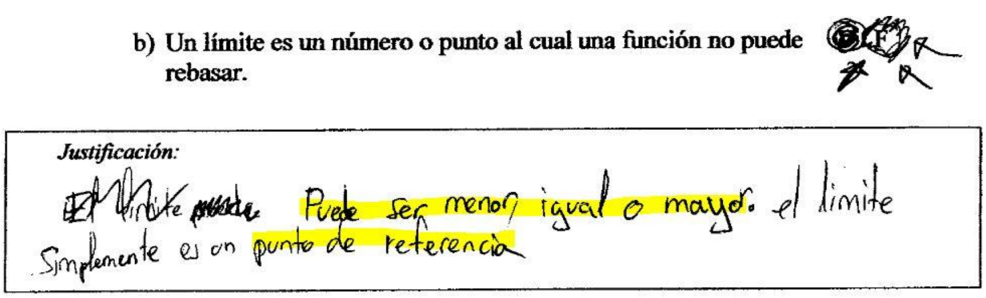
Definición :

Un límite es un valor al que la función tiende a acercarse, puede llegar a él pero no puede superarlo.

IV.4. Figuras que ejemplifican respuestas excluidas del análisis pero relevantes.

Figura 4.10.

Respuesta al ítem A1.1.b excluida de la tabla 4.3



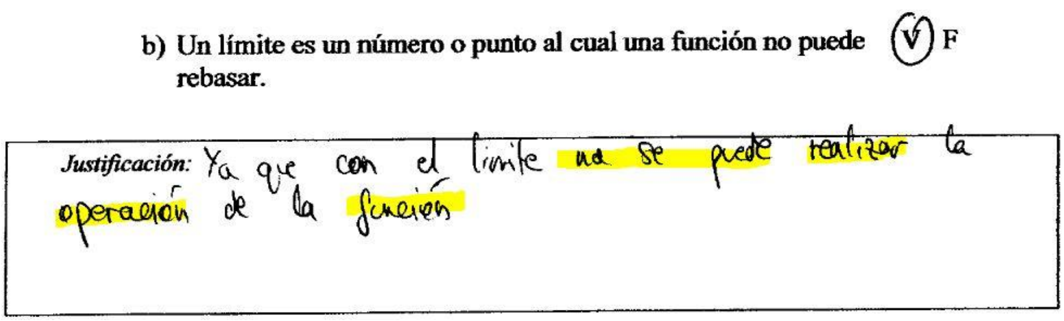
b) Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar. V F

Justificación:

~~El límite puede~~ Puede ser menor igual o mayor. el límite Simplemente es un punto de referencia

Figura 4.11.

Respuesta al ítem A1.1.b excluida de la tabla 4.3



b) Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar. V F

Justificación: Ya que con el límite no se puede realizar la operación de la función

Figura 4.12.

Respuesta al ítem B1.1.a excluida de la tabla 4.3

a) Un límite es un número o punto al que la función se acerca V F pero nunca alcanza.

Justificación: Es verdadero porque si alcanzara el número la función tendría fin.

ANEXO V: Figuras incluidas en el apartado 4.8 de la memoria

En este anexo incluimos las figuras que ejemplifican respuestas representativas de cada uno de los apartados de la actividad A2 (A2.a, A2.b y A2.c), tanto las que han sufrido efecto de los distractores “flechas” y “punto indicado”, como las que, no detectando influencia significativa de los mimos, consideramos relevantes.

V.1. Figuras que ejemplifican respuestas objeto de influencia del distractor “flechas”

Figura 5.1.

Respuesta al ítem A2.a objeto de influencia del distractor “flecha”

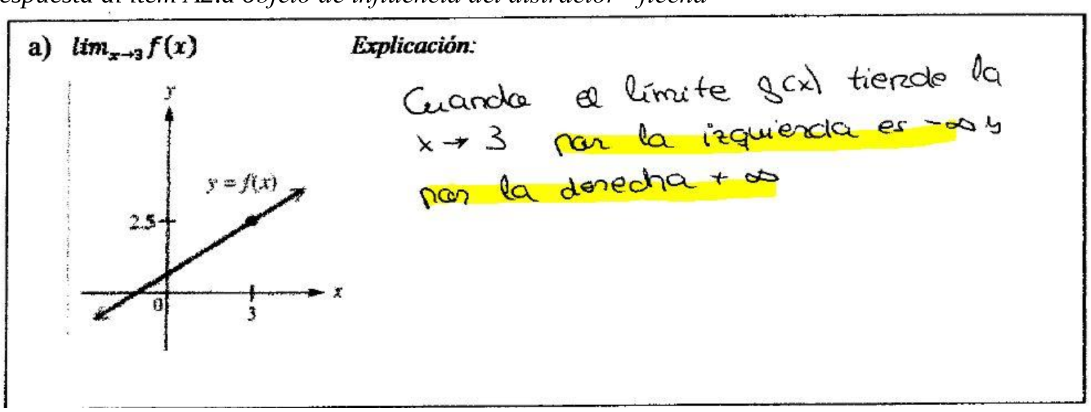


Figura 5.2.

Respuesta al ítem A2.a no objeto de influencia del distractor “flecha”

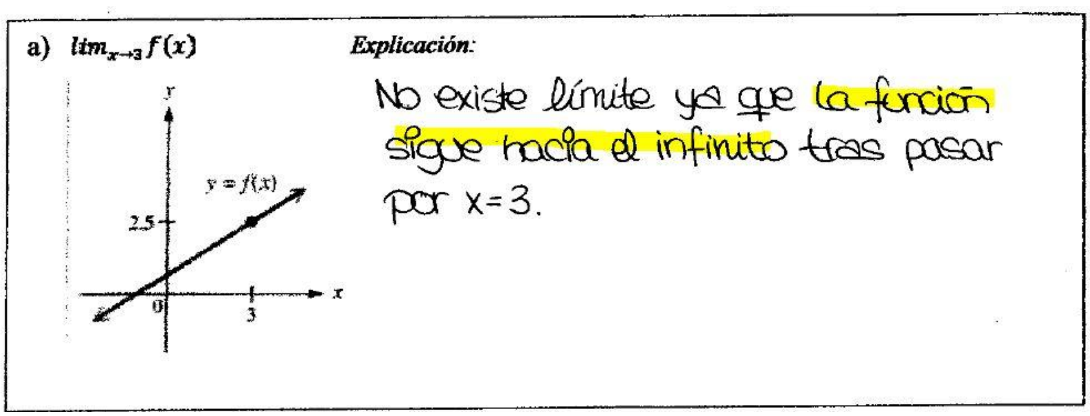


Figura 5.3.

Respuesta al ítem A2.b objeto de influencia del distractor "flecha"

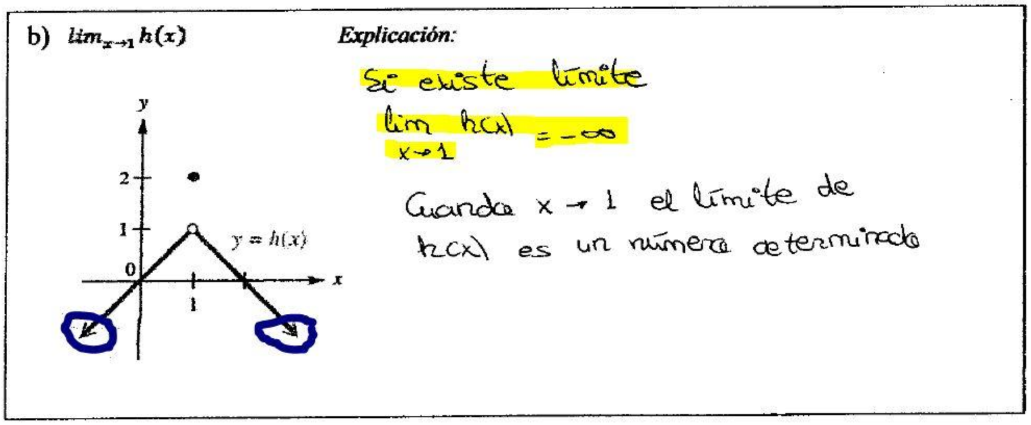
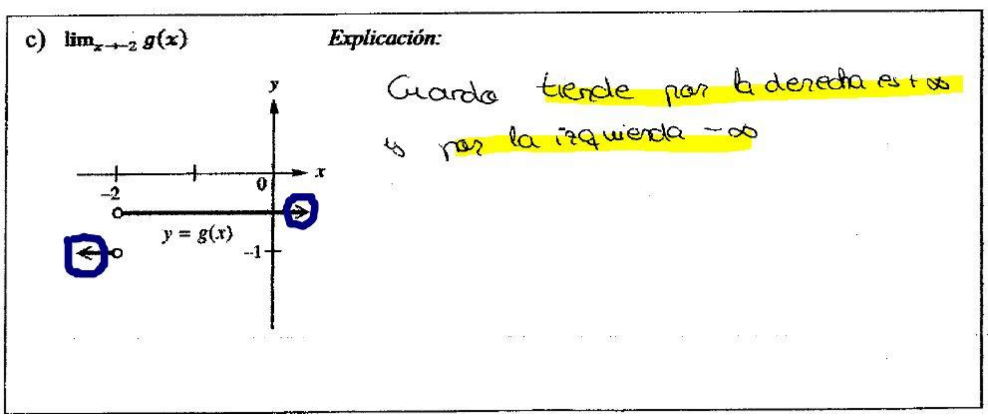


Figura 5.4.

Respuesta al ítem A2.c objeto de influencia del distractor "flecha"



V.2. Figuras que ejemplifican respuestas objeto de influencia del distractor “punto indicado”

Figura 5.5.

Respuesta al ítem A2.a objeto de influencia del distractor “punto indicado”

Figura 5.6.

Respuesta al ítem A2.b objeto de influencia del distractor “punto indicado”

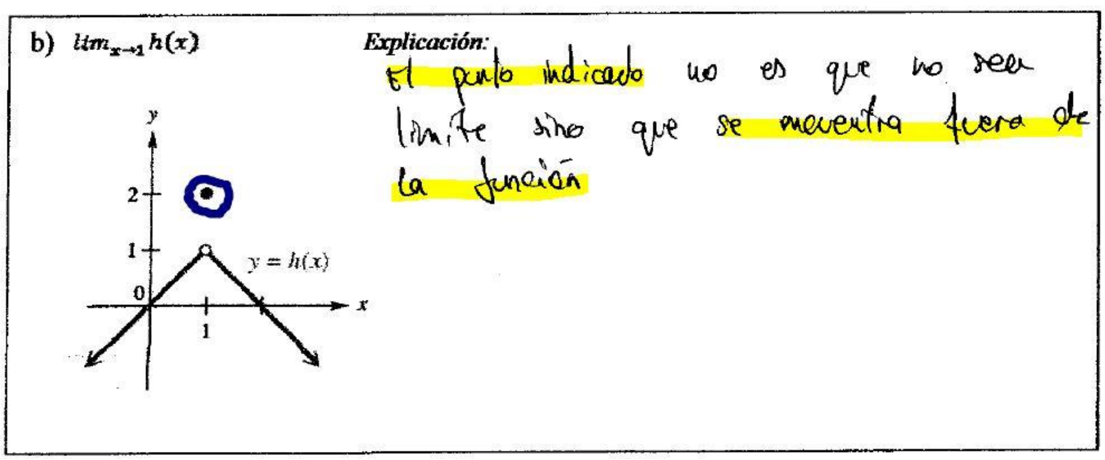
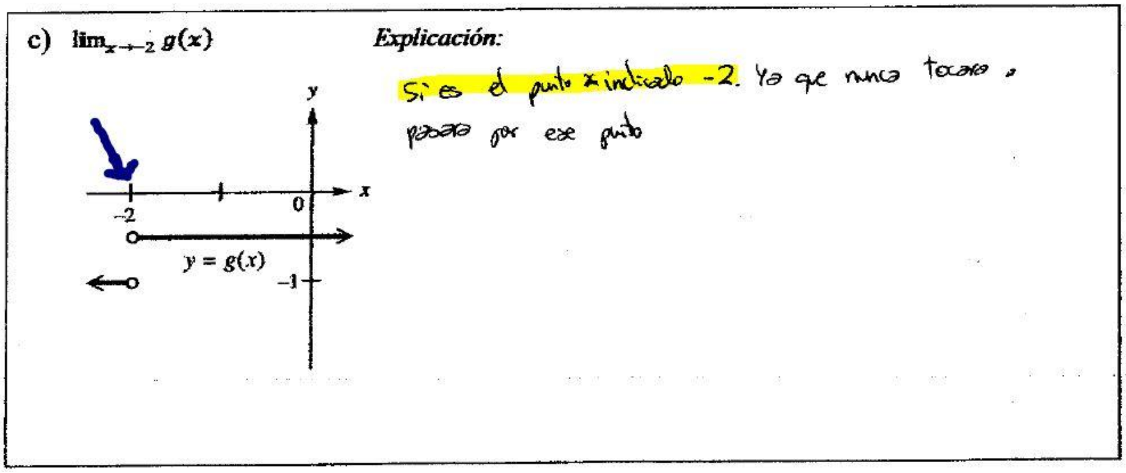


Figura 5.7.

Respuesta al ítem A2.c objeto de influencia del distractor "punto indicado"



V.3. Figuras que ejemplifican respuestas relacionadas con *identificación del límite como imagen del punto.*

Figura 5.8.

Respuesta al ítem A2.a donde se da una identificación del límite con la imagen

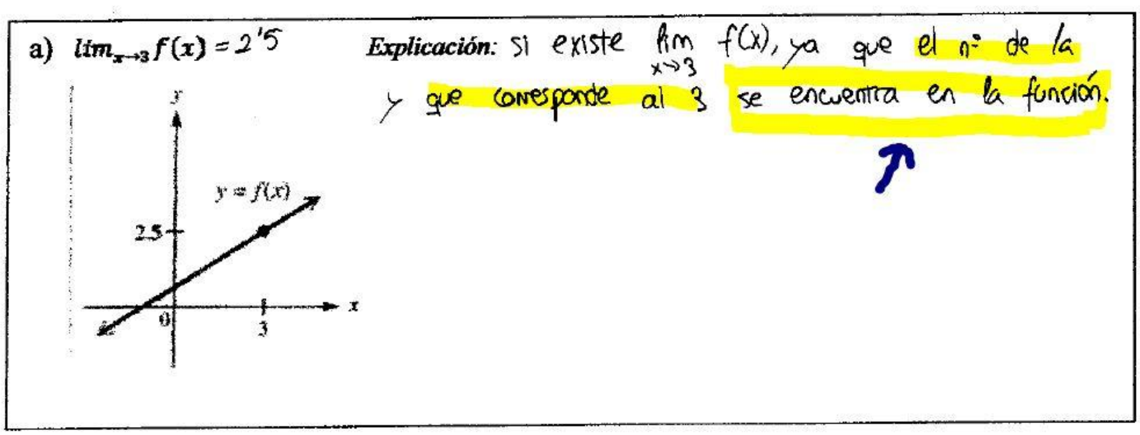


Figura 5.9.

Respuesta al ítem A2.b donde se da una identificación del límite con la imagen

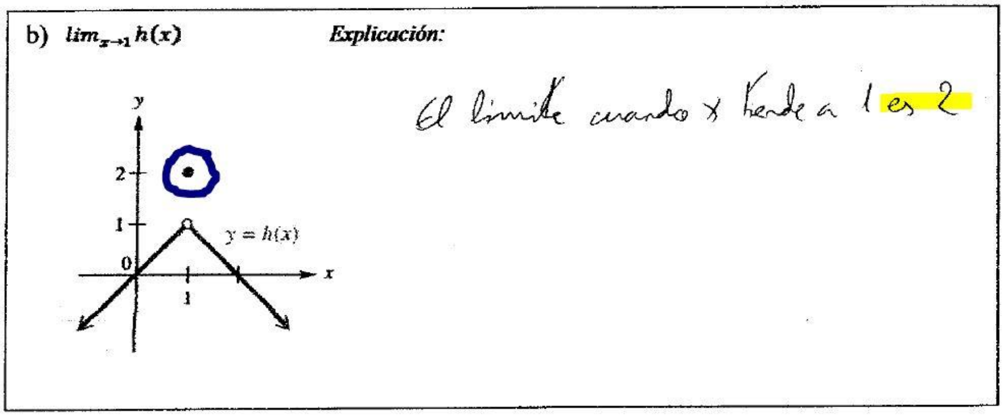


Figura 5.10.

Respuesta al ítem A2.b donde no se da una identificación del límite con la imagen

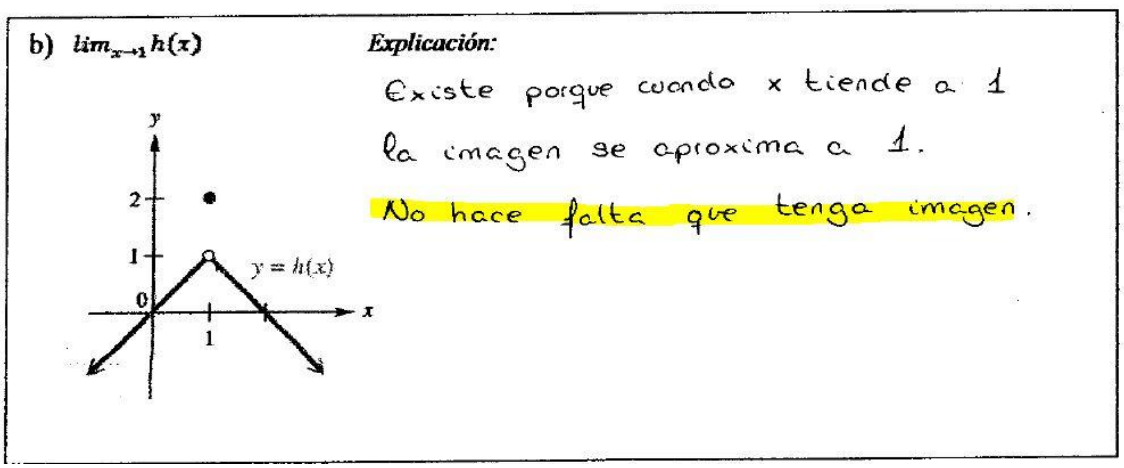
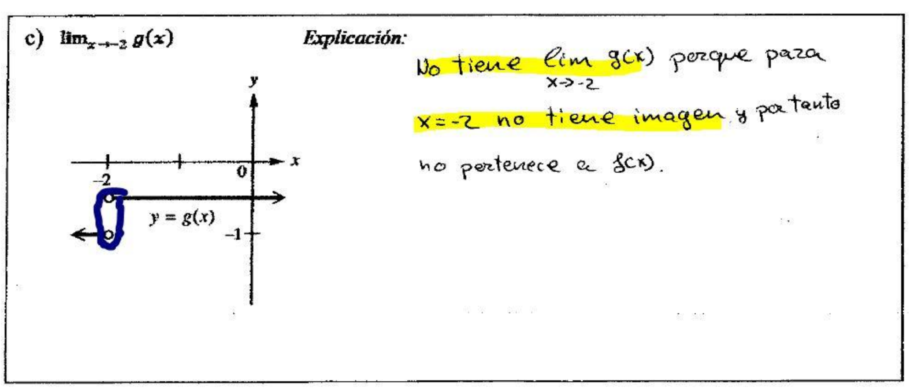


Figura 5.11.

Respuesta al ítem A2.c que pone de manifiesto la necesidad de que la función esté definida en el punto.



V.4. Figuras que ejemplifican respuestas relacionadas con *confusión de la variable dependiente e independiente.*

Figura 5.12.

Respuesta al ítem A2.a donde se da una confusión entre la variable dependiente y la independiente.

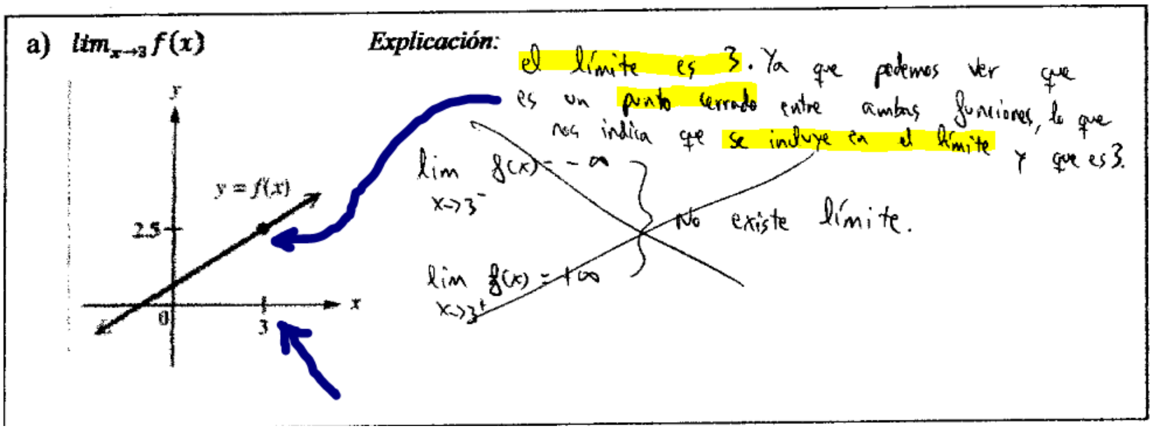
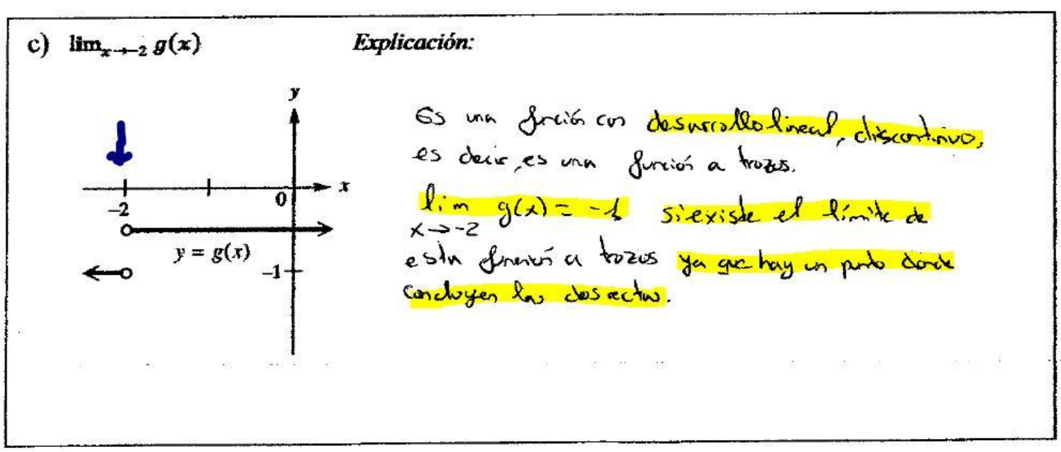


Figura 5.13.

Respuesta al ítem A2.c donde se da una confusión entre la variable dependiente y la independiente.



V.5. Figuras que ejemplifican respuestas relacionadas con *límite como cambio brusco del comportamiento de una función en el punto.*

Figura 5.14.

Respuesta al ítem A2.b que interpreta el límite como cambio brusco del comportamiento de la función en el punto

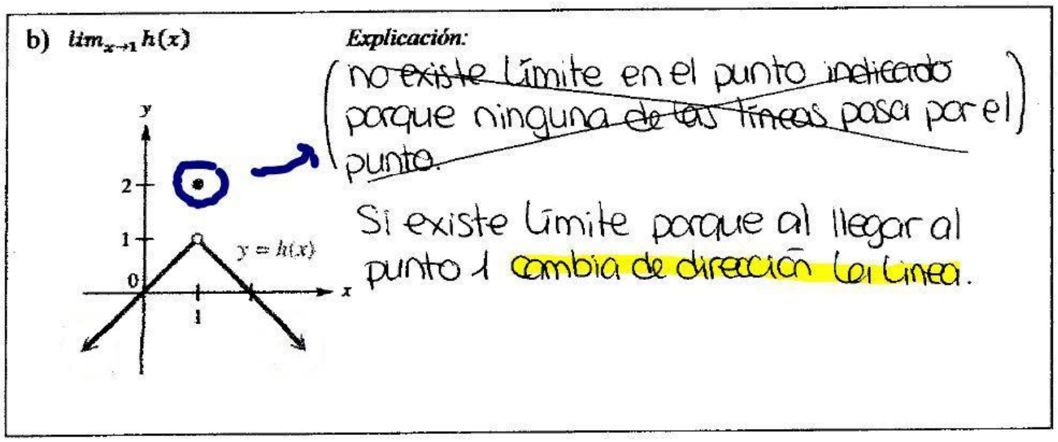


Figura 5.15.

Respuesta al ítem A2.c que interpreta el límite como cambio brusco del comportamiento de la función en el punto